

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI, INFORMATYKI I INŻYNIERII
BIOMEDYCZNEJ



ROZPRAWA DOKTORSKA

MACIEJ RÓŻEWICZ

**ALGORYTMY STABILIZACJI
POJAZDÓW JEDNOŚLADOWYCH**

Promotor:

dr hab. inż. ADAM PIŁAT, prof. nadzw. AGH

Kraków, 2019

AGH
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY IN KRAKÓW

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING, AUTOMATICS, COMPUTER
SCIENCE AND BIOMEDICAL ENGINEERING



PHD DISSERTATION

MACIEJ RÓŻEWICZ

**ALGORITHMS FOR STABILIZATION
OF SINGLE-TRACK VEHICLES**

Supervisor:

Associate Professor ADAM PIŁAT, PhD

Kraków, 2019

Serdecznie dziękuję mojemu promotorowi profesorowi Adamowi Piłatowi za pomoc, wsparcie, inspiracje i motywacje w czasie studiów doktoranckich. Szczególne podziękowania składam rodzicom za wieloletni trud włożony w moje wychowanie i edukację, a także mojej narzeczonej Agacie za wyrozumiałość i cierpliwość oraz korektę tekstu. Dziękuję również bratu Wojciechowi za pomoc w przygotowaniu rysunków.

Streszczenie

We współczesnym przemyśle motoryzacyjnym coraz większą uwagę skupia się na systemach bezpieczeństwa. W ostatnich latach szczególnie nacisk położony jest na rozwijanie tak zwanych systemów wspierania kierowcy (ang. *Advanced Driver Assistance System* - **ADAS**) oraz autonomicznej jazdy (ang. *Autonomous Driving*). Systemy **ADAS** mają za zadanie obserwować stan pojazdu i jego otoczenie, wykrywać potencjalne niebezpieczeństwo i ostrzec przed nim kierowcę, lub wręcz przejąć chwilowo kontrolę nad samochodem, by go uniknąć. Naturalnym wydaje się rozszerzenie tego typu systemów na pojazdy jednośladowe, jednak posiadają one więcej stopni swobody i możliwość utraty stabilności w pionie. Rozprawa ta ma za zadanie opracowanie modelu matematycznego jednośladu i zastosowanie go do syntezy algorytmów sterowania, które zapewniają stabilność w pionie.

W pierwszej części pracy przedstawiony został przegląd aktualnej literatury dotyczącej zagadnienia stabilizacji jednośladow, pokazano różne typy mechanicznej konstrukcji stabilizatorów: manewrowanie kierownicą, stabilizację przez manewrowanie masą, koło reakcyjne i stabilizację żyroskopową. Zaprezentowano wady i zalety każdego z nich i wyjaśniono, dlaczego zdecydowano się na stabilizator żyroskopowy (ang. *Control Moment Gyroscope* - **CMG**).

Kolejna część pracy poświęcona jest modelowaniu dynamiki jednośladu ze stabilizatorem żyroskopowym. Przedstawiono równania dynamiki **CMG** dla różnych konfiguracji i uzasadniono wybór realizowanej. Omówiono sposób, w jaki wybrano parametry koła zamachowego. Następnie wyprowadzony został model dynamiki całego jednośladu. Zaprezentowano jego różne formy i uproszczenia. Dla każdej z zaprezentowanych form przedstawiono analizę modelu pod względem obserwowalności, sterowalności (zarówno modelu nieliniowego jak i przybliżenia liniowego), analizę rozkładu wartości własnych, charakterystyki Bodego oraz reprezentację w postaci transmitancji operatorowej.

Następna część przedstawia algorytmy sterowania, które zostały użyte do stabilizacji jednośladu. Zaprezentowane algorytmy podzielono na dwie grupy: liniowe (PID, regulator LQ i sterowanie H_∞) i nieliniowe (linearyzujące sprzężenie zwrotne, sterowanie w reżimie ślizgowym, metoda sterującej funkcji Lapunowa oraz - opracowana przez autora - metoda sterowania odpornego, wykorzystująca twierdzenie Charitonowa). Przybliżono zarys teoretyczny każdej z wymienionych metod oraz realizację dla obranego modelu dynamiki.

Ostatnia część pracy prezentuje praktyczną realizację zaprojektowanego układu. Przedstawiono konfigurację sprzętową z opisem każdego z najważniejszych elementów. Omówiona została również metodologia *Model Based Design* służąca do projektowania i testowania układów automatyki - zaprezentowano podejścia testowe: MiL, SiL i PiL. Na koniec pokazano przebiegi z realizacji wszystkich z przedstawionych algorytmów, przetestowano różne konfiguracje parametrów oraz odporność dla zmodyfikowanej masy względem nominalnego modelu. W tej części pracy zaproponowano też zestaw wskaźników jakości, według których oceniono jakość każdego z proponowanych algorytmów sterowania.

Na zakończenie podsumowano realizację pracy oraz udowodnione tezy, a także zaproponowano dalsze możliwe kierunki badań.

Abstract

In modern automotive industry more and more attention is focused on safety systems. In last years most emphasis has been put on the development of Advanced Driver Assistance Systems (**ADAS**) and autonomous driving. **ADAS** systems are designed to monitor of car environment, detect potentially dangerous situation and warn driver about it or even take control (fully or partially) to avoid accident. It seems to be natural to extend such type of systems to single-track vehicles. However they have more degrees of freedom and possibility of loss of vertical stability. This dissertation is devoted to developing mathematical model of single-track vehicle and apply it to synthesis of control algorithms for stabilization of bicycle vertical position.

First part of this dissertation presents overview of current literature about single-track vehicles stabilization. Different types of mechanical stabilizer construction are reviewed: handlebar maneuvering, mass balancer, reaction wheel and control moment gyroscope. Each of them has listed pros and cons. Also explanation why gyroscopic stabilization was chosen in this dissertation.

The next part of thesis is devoted to mathematical modelling of bicycle with gyroscopic stabilizer, so called Controlled Moment Gyroscope (**CMG**). There is presented developing of **CMG** dynamic equations - various mounting configurations are discussed. Next dynamic model of whole system - bicycle + **CMG** - is presented. Different form and simplification were presented here. For each of them the analysis of the model in terms of observability, controllability and stability is presented. Also eigenvalues distribution, Bode characteristics and transfer functions are analysed.

The next part is devoted to the presentation of selected control algorithms, that were used for single-track vehicle stabilization. Algorithms were divided into two groups: linear (PID, LQ controller and robust H_∞ controller) and nonlinear (feedback linearization, sliding mode controller, control Lyapunov function and robust control method developed by author based on Kharitonov's theorem). Theoretical outline for each of these methods are presented and realization for selected dynamic model.

The last part of dissertation presents practical realization of designed system. This part presents hardware configuration with description of most important elements. It contains brief introduction to Model Based Design approach to design and testing automation systems - MiL, SiL, PiL tests. Finally, the implementation and practical realization of all described control algorithms is resented. Various parameters configuration were tested and robustness for modified mass. This section also proposes a set of quality indicators, according to which the quality of each of the proposed control algorithms was assessed.

At the end summary of realization of dissertation and proved thesis, also potential directions of future research are pointed.

Spis treści

Spis oznaczeń	18
1. Wprowadzenie	21
1.1. Motywacje	21
1.2. Sformułowanie problemu badawczego.....	22
1.3. Plan pracy	23
2. Przegląd literatury	25
2.1. Metody stabilizacji jednoślada	26
2.1.1. Manewrowanie kierownicą	27
2.1.2. Balans masą.....	27
2.1.3. Koło reakcyjne	29
2.1.4. Stabilizacja żyroskopowa - Control Moment Gyroscope (CMG).....	30
2.2. Podsumowanie.....	31
3. Stabilizacja żyroskopowa - Control Moment Gyroscope	35
3.1. Zastosowania	35
3.2. Model matematyczny	35
3.2.1. Dyskusja orientacji i położenia CMG	37
3.2.2. Projekt koła zamachowego.....	42
4. Matematyczny model jednoślada ze stabilizatorem żyroskopowym	47
4.1. Założenia upraszczające model	47
4.2. Analiza modelu.....	47
4.2.1. Stabilność	48
4.2.2. Sterowalność	48
4.2.3. Obserwowalność	49
4.3. Parametry.....	49
4.4. Dyskretyzacja	51
4.4.1. Linearyzacja - dyskretyzacja.....	51
4.4.2. Dyskretyzacja wprost.....	52

4.5.	Model kinematyki.....	52
4.6.	Model dynamiki.....	53
4.6.1.	Energia potencjalna.....	55
4.6.2.	Energia kinetyczna.....	55
4.6.3.	Równanie Eulera-Lagrange'a.....	56
4.7.	Model pełny.....	57
4.7.1.	Sterowanie momentem.....	57
4.7.2.	Sterowanie napięciem.....	63
4.8.	Model uproszczony.....	71
5.	Algorytmy sterowania.....	79
5.1.	Zakłócenia.....	79
5.1.1.	Strukturalne.....	80
5.1.2.	Niestrukuralne.....	80
5.2.	Algorytmy liniowe.....	80
5.2.1.	Regulator PID.....	80
5.2.2.	Regulator liniowo-kwadratowy.....	81
5.2.3.	Regulator H_∞	85
5.3.	Algorytmy nieliniowe.....	87
5.3.1.	Linearyzujące sprzężenie zwrotne.....	87
5.3.2.	Metoda sterującej funkcji Lapunowa.....	94
5.3.3.	Sterowanie w reżymie ślizgowym.....	96
5.3.4.	Sterowanie z redukcją zakłóceń.....	98
5.3.5.	Proponowane sterowanie odporne.....	104
5.4.	Ograniczenie sterowania.....	110
6.	Eksperymenty.....	113
6.1.	Laboratoryjny model badawczy.....	113
6.1.1.	Sterownik.....	113
6.1.2.	Czujnik IMU.....	115
6.1.3.	Silnik krokowy.....	116
6.1.4.	Silnik BLDC.....	117
6.1.5.	Układ weryfikacyjny.....	118
6.2.	Filtracja IMU.....	120
6.2.1.	Model pomiaru.....	120
6.2.2.	Filtracja.....	121

6.3. Podejścia testowe.....	127
6.3.1. Metoda typu „Model in the Loop”	129
6.3.2. Metoda typu „Software in the Loop”	131
6.3.3. Metoda typu „Processor in the Loop”	132
6.3.4. Metoda typu „Hardware in the Loop”	133
6.4. Wyniki badań eksperymentalnych.....	133
6.4.1. Filtracja w układzie rzeczywistym.....	133
6.4.2. Wyniki eksperymentalne	135
6.4.3. Porównanie rezultatów badań	147
7. Podsumowanie	157
A. Macierz obserwowalności modelu pełnego sterowanego momentem.....	159
B. Macierz obserwowalności modelu pełnego sterowanego napięciem	163
C. Regulator PD_{cos} przy obecności zakłóceń - rezultaty eksperymentalne.....	167
D. Linearyzujące sprzężenie zwrotne przy obecności zakłóceń - rezultaty eksperymentalne	169
E. Regulator NDOBRC przy obecności zakłóceń - rezultaty eksperymentalne	171
Bibliografia	182

Spis rysunków

1.1	Oryginalny egzemplarz roweru Sauerbronna przechowywany w muzeum w Karlsruhe. . .	21
2.1	Model Whipple'a - obszar stabilności.	26
2.2	Przykładowa realizacja stabilizacji jednoślada za pomocą manewrowania kierownicą. . .	28
2.3	Przykładowa realizacja stabilizatora z balansem masą.	28
2.4	Jednoślad z kołem reakcyjnym.	29
2.5	Schemat osi obrotu dla stabilizatora CMG	30
2.6	Przykładowa realizacja stabilizatora żyroskopowego.	31
3.1	Schemat działania CMG	37
3.2	Schemat obrotów CMG dla głównej osi zgodnej z OX	38
3.3	Schemat obrotów CMG dla głównej osi zgodnej z OY	39
3.4	Schemat obrotów CMG dla głównej osi zgodnej z OZ	41
3.5	Wykres wymaganego momentu bezwładności	43
3.6	Naprężenia w kole zamachowym - widok z przodu.	44
3.7	Naprężenia w kole zamachowym - widok z tyłu.	44
3.8	Projekt stabilizatora.	45
4.1	Schemat prezentujący promień skrętu w zależności od kąta wychylenia kierownicy. . . .	53
4.2	Schematyczny rysunek jednoślada z CMG wraz z zaznaczonymi układami współrzędnych.	54
4.3	Zmienność wartości własnych dla różnych wychyleń jednoślada od pionu x_1 dla modelu sterowanego momentem.	60
4.4	Zmienność wartości własnych dla różnych wychyleń koła zamachowego x_3 dla modelu sterowanego momentem przy regulacji LQ.	61
4.5	Charakterystyka Bodego dla układu pełnego rzędu.	64
4.6	Zmienność wartości własnych dla różnych wychyleń jednoślada od pionu x_1 dla modelu sterowanego napięciowo.	67
4.7	Zmienność wartości własnych dla różnych wychyleń koła zamachowego x_3 dla modelu sterowanego napięciowo przy regulacji LQ.	68

4.8	Charakterystyka Bodego dla układu pełnego rzędu ze sterowaniem napięciem.	72
4.9	Zmienność wartości własnych dla różnych wychyleń jednoślada od pionu x_1 dla modelu zredukowanego.	74
4.10	Zmienność wartości własnych dla różnych wychyleń koła zamachowego x_3 dla modelu zredukowanego przy regulacji LQ.	75
4.11	Charakterystyka Bodego modelu uproszczonego.	77
5.1	Wyniki badań symulacyjnych dla regulatora PD_{cos}	82
5.2	Wyniki symulacyjne dla regulatora LQ.	84
5.3	Schemat blokowy sterowania H_∞	86
5.4	Charakterystyka Bodego układu otwartego dla różnych wartości masy m_{fr}	88
5.5	Charakterystyka Bodego układu z regulatorem H_∞ dla różnych wartości masy m_{fr}	88
5.6	Wyniki badań symulacyjnych dla regulatora H_∞	89
5.7	Schemat sterowania z metodą linearyzującego sprzężenia zwrotnego.	91
5.8	Wyniki badań symulacyjnych dla metody linearyzującego sprzężenia zwrotnego.	93
5.9	Wyniki badań symulacyjnych dla metody sterującej funkcji Lapunowa.	95
5.10	Wyniki badań symulacyjnych dla sterowania w reżimie ślizgowym.	98
5.11	Wyniki badań symulacyjnych dla sterowania w reżimie ślizgowym z wygładzonym sterowaniem.	99
5.12	Schemat blokowy układu sterowania z nieliniowym obserwatorem zakłóceń.	100
5.13	Schemat regulatora z obserwatorem zakłóceń - NDOBRC - zrealizowany w pakiecie Simulink.	102
5.14	Rzeczywiste i obserwowane zakłócenie.	103
5.15	Wyniki badań symulacyjnych dla regulatora NDOBRC z użyciem regulatora LQ jako bazowego.	105
5.16	Wyniki symulacyjne dla regulatora odpornego.	111
6.1	Schemat ideowy połączeń zbudowanego układu.	114
6.2	Funkcjonalny model eksperymentalny.	114
6.3	Szum pomiarowy żyroskopu.	115
6.4	Szum pomiaru kąta.	116
6.5	Moment silnika krokowego w funkcji prędkości	117
6.6	Charakterystyka skokowa silnika krokowego	118
6.7	Schemat układu weryfikacyjnego.	119
6.8	Czujnik podczas pomiaru.	120
6.9	Schemat montażu czujnika IMU.	122

6.10	Schemat blokowy filtra komplementarnego.	122
6.11	Porównanie charakterystyk Bodego dla filtra pozycji.	126
6.12	Porównanie charakterystyk Bodego dla filtra prędkości.	127
6.13	Porównanie stosunku sygnału do szumu (SNR).	128
6.14	Schemat V-modelu procesu rozwoju projektu w metodologii <i>Model Based Design</i>	129
6.15	Model symulacyjny.	130
6.16	Kąt wychylenia kierownicy w teście II.	130
6.17	Wyniki symulacji MiL dla testu I.	131
6.18	Wyniki symulacji MiL dla testu II.	132
6.19	Schemat realizacji testów typu SiL.	133
6.20	Konfiguracja sprzętowo-programowa dla testu typu PiL.	134
6.21	Porównanie wyników testów MiL i PiL dla testu I.	135
6.22	Porównanie wyników testów MiL i PiL dla testu II.	136
6.23	Histogram czasów między kolejnymi pomiarami w teście typu PiL.	137
6.24	Pomiar żyroskopem.	137
6.25	Pomiar akcelerometrem.	138
6.26	Żyroskop FFT.	138
6.27	Akcelerometr FFT.	139
6.28	Pomiar weryfikacyjny wychylenia jednoślada.	139
6.29	Rower w trybie stabilizacji - widok z tyłu.	140
6.30	Rower w trybie stabilizacji - widok z boku.	141
6.31	Porównanie działania regulatora PD_{cos} dla różnych zestawów parametrów.	142
6.32	Porównanie działania regulatora PD_{cos} dla modelu nominalnego oraz dla dodatkowego obciążenia.	143
6.33	Wyniki działania regulatora LQ.	144
6.34	Porównanie działania regulatora H_{∞} dla różnych zestawów parametrów.	145
6.35	Porównanie działania regulatora H_{∞} dla modelu nominalnego oraz dla dodatkowego obciążenia.	146
6.36	Porównanie działania regulatora z linearyzującym sprzężeniem zwrotnym dla różnych zestawów parametrów.	147
6.37	Porównanie działania regulatora z linearyzującym sprzężeniem zwrotnym dla modelu nominalnego oraz dla dodatkowego obciążenia.	148
6.38	Porównanie działania regulatora ślizgowego dla różnych zestawów parametrów.	149
6.39	Porównanie działania regulatora odpornego dla różnych zestawów parametrów.	150

6.40	Porównanie działania regulatora odpornego dla modelu nominalnego oraz dla dodatkowego obciążenia.	151
6.43	Graficzna prezentacja kryterium $Q_4(u)$ - czasu regulacji.	151
6.41	Wyniki działania regulatora PD_{cos} z obserwatorem zakłóceń NDOBRC	152
6.42	Estymowane zakłócenia.	153
C.1	Działanie regulatora z linearyzującym sprzężeniem zwrotnym przy ręcznym wytrącaniu z punktu równowagi.	167
D.1	Działanie regulatora z linearyzującym sprzężeniem zwrotnym przy ręcznym wytrącaniu z punktu równowagi.	169
E.1	Wyniki działania regulatora NDOBRC przy ręcznym wytrącaniu z punktu równowagi.	171
E.2	Estymowane zakłócenia dla testu przy ręcznym wytrącaniu z punktu równowagi.	172

Spis oznaczeń

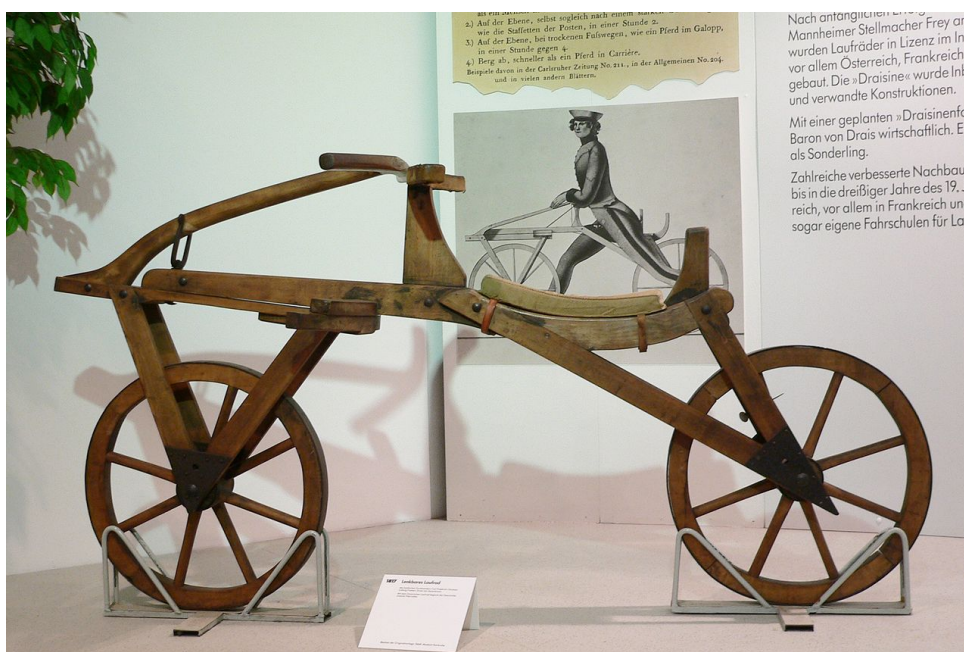
$x(t)$	wektor stanu - stan modelu nieliniowego i modelu zlinearyzowanego oznaczane są tym samym symbolem
x^{eq}	punkt równowagi
x^0	stan początkowy
$y(t)$	wektor obserwacji
$u(t)$	sygnał sterujący
u^{eq}	sterowanie w punkcie równowagi
A	macierz przejścia układu liniowego/zlinearyzowanego
B	macierz sterowania układu liniowego/zlinearyzowanego
C	macierz obserwacji układu liniowego/zlinearyzowanego
$\mathbf{Q}(x) = [q_{ij}(x)]$	macierz sterowalności układu nieliniowego
$\mathbf{Q}^L = [q_{ij}^L]$	macierz sterowalności układu zlinearyzowanego
$\mathbf{M} = [m_{ij}]$	macierz obserwowalności układu zlinearyzowanego
$L_f^k g(x)$	pochodna Lie'go k -tego rzędu
$ad_f^k g(x)$	operator nawiasów Lie'go k -tego rzędu
$[f, g]$	operator nawiasów Lie'go pierwszego rzędu
T_s	okres próbkowania
λ	wektor wartości własnych macierzy
Q, R	macierze wag regulatora liniowo-kwadratowego
$Q(u)$	wskaźnik jakości
MiL	Model in the Loop
SiL	Software in the Loop
PiL	Processor in the Loop
HiL	Hardware in the Loop
CMG	Controlled Moment Gyro
LQ	Linear-Quadratic
PD	Proportional-Derivative
SNR	Signal to Noise Ratio
NDOB	Nonlinear Disturbance Observer
NDOBRC	Nonlinear Disturbance Observer Robust Control

SCP	Small Control Property
CLF	Control Lyapunov Function
IMU	Inertial Measurement Unit
PWM	Pulse Width Modulation
BKF	Biased Kalman Filter

1. Wprowadzenie

1.1. Motywacje

Pierwszy pojazd, który można uznać za prototyp roweru, został skonstruowany pod koniec XVIII wieku we Francji przez Mede'a de Sivraca. Był to niedoskonały wynalazek, posiadał wiele wad funkcjonalnych (między innymi brak kierownicy uniemożliwiał łatwą zmianę kierunku jazdy). Był nazywany „maszyną do biegania” i nie cieszył się dużą popularnością. Mimo to, dzieło de Sivraca zainspirowało innych wynalazców do udoskonalenia jednośladu [118].



Rys. 1.1. Oryginalny egzemplarz roweru Sauerbronna przechowywany w muzeum w Karlsruhe [64].

Początek historii roweru datuje się na rok 1818. Niemiecki hrabia, Karl Freiherr Drais von Sauerbronn, [56] opatentował wówczas pojazd, w którym wyeliminowano większość wad poprzedników. Posiadał udogodnienia, takie jak kierownica, hamulec uruchamiany linką czy siodło o regulowanej wysokości. Model ten zyskał zastosowanie praktyczne jako środek transportu do szybkiego przemieszczania się (osiągał prędkość około 15 km/h) oraz do celów sportowych. Od tego czasu popularność

rowerów szybko rosła. Pod koniec XIX stulecia w krajach zachodniej Europy podróże rowerowe stanowiły około 80% transportu osobowego. Wraz ze wzrostem prędkości roweru i ich rozpowszechnieniem rosło zagrożenie bezpieczeństwa rowerzystów i innych uczestników ruchu drogowego. Pierwszy odnotowany wypadek komunikacyjny na drodze publicznej z udziałem roweru miał miejsce już w 1842 roku (potrącenie dziecka przez rowerzystę) [118].

Naturalnym etapem rozwoju pojazdów jednośladowych było zastąpienie napędu ludzkich mięśni przez silnik. W 1885 roku Gottlieb Daimler skonstruował pierwszy pojazd uważany za motocykl, w którym zastosowano wynaleziony w 1878 roku silnik spalinowy. Warto zaznaczyć, że już wcześniej istniały eksperymentalne konstrukcje z zastosowaniem silnika parowego (1869 r. Michaux-Perreaux) oraz elektrycznego (lata 80'te XIX wieku - The Humber Company). Pierwszą seryjną produkcję motocykli rozpoczęła firma Wildebrand & Wolfmüller w 1894 roku.

Praktyczny rozwój jednośladów pociągnął za sobą zainteresowanie naukowców badaniem ich dynamiki i wyjaśnieniem, na jakiej zasadzie utrzymują równowagę. Pierwsza, opublikowana przez Whipple'a w „Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics”, praca na ten temat pochodzi z roku 1899, Whipple wyjaśnia w niej fenomen stabilizacji jednośladów.

We współczesnym przemyśle motoryzacyjnym coraz więcej uwagi i wysiłku badawczego poświęca się zagadnieniom bezpieczeństwa. Szczególnie duże zainteresowanie mają systemy Aktywnego Bezpieczeństwa (ang. *Active Safety* - **AS**) i wspomagania kierowcy (ang. *Advanced Driver Assistance System* - **ADAS**), a także pełna automatyzacja pojazdów (ang. *Autonomous Driving* - **AD**). W większości są to systemy przeznaczone dla samochodów, nie jest możliwe ich bezpośrednie zastosowanie w jednośladach, które mają zupełnie inną dynamikę, co powoduje możliwość utraty równowagi, a w konsekwencji upadku. Zasadne jest zatem utworzenie analogicznych systemów bezpieczeństwa dla jednośladów, zwłaszcza iż według statystyk ryzyko śmierci motocyklisty w wypadku komunikacyjnym jest 37 razy wyższe niż pasażera samochodu [3].

1.2. Sformułowanie problemu badawczego

Jednoślad, w porównaniu z samochodem, przysparza dodatkową trudność wynikającą z jego naturalnej niestabilności. Konieczne jest zapewnienie stabilności pozycji wertykalnej w różnych warunkach - zarówno w czasie jazdy jak i podczas postoju. Celowym jest zatem opracowanie systemu aktywnej stabilizacji (ang. *Active Stabilization System* - **ASS**).

Jako że jednoślady są nieliniowymi układami niestabilnymi, zadanie to może stanowić interesujący problem dla inżynierów sterowania. System aktywnej stabilizacji powinien działać poprawnie dla różnych kierowców, a tym samym odznaczać się dużą odpornością na zmiany parametrów działania.

Celem niniejszej pracy jest udowodnienie, iż **możliwe jest utworzenie nieliniowego regulatora stabilizującego jednoślad w warunkach postoju** (jest to przypadek trudniejszy, gdyż jednoślad w pewnym zakresie prędkości posiada własność samostabilizacji - zobacz rysunek 2.1). Za zadanie postawiono sobie również **pokazanie, że dzięki zastosowaniu regulatora nieliniowego można uzyskać większy obszar**

atrakcji niż przy zastosowaniu regulatorów liniowych. Ponadto, projektowany regulator powinien odznaczać się odpowiednio dużą odpornością na zmiany parametrów układu.

1.3. Plan pracy

Praca została podzielona na sześć rozdziałów. W każdym z nich omówiono poszczególne etapy analizy układu i projektowania stabilizatora wraz z zastosowanymi algorytmami sterowania.

Na początku, w rozdziale drugim, wykonano i zreferowano przegląd literatury. Zostały w nim zawarte i pokrótce opisane odnalezione w literaturze podejścia do tematu stabilizacji jednoślada. Na końcu rozdziału znajduje się tabela zestawiająca wady i zalety każdej z analizowanych metod. Kolejna część (rozdział 3) to omówienie wybranego podejścia - stabilizatora żyroskopowego (ang. *Control Moment Gyro* - **CMG**) wraz z modelem matematycznym. Wyprowadzony model **CMG** posłużył do wyprowadzenia opisu matematycznego dynamiki całego systemu - jednoślada + **CMG** - który nadaje się do sformułowania problemu sterowania i projektowania regulatora. Zaprezentowano kilka modeli: nieliniowe, liniowe, model pełny, a także model z uproszczeniem na sterowanie. Dla ostatniego z wymienionych zaprojektowano kilka typów regulatorów (liniowe: PID, LQ, H_∞ , oraz nieliniowe: linearyzujące sprzężenie zwrotne, sterująca funkcja Lapunowa, sterowanie w reżimie ślizgowym, sterowanie z obserwacją i kompensacją zakłóceń, zaproponowano również metodę sterowania odpornego), które przedstawione zostały w rozdziale 5. Tamże przybliżono podstawy teoretyczne każdego z wykorzystanych regulatorów, jak również rozwiązanie postawionego wcześniej problemu badawczego.

Ostatni rozdział (6) zawiera opis praktycznej części realizacji projektu. Opisano budowę modelu eksperymentalnego - realizację układu mechanicznego, system pomiarowy oraz platformę sprzętową, która posłużyła do wykonania algorytmów sterowania w czasie rzeczywistym. Przedstawiono również metodykę tworzenia, wdrażania oprogramowania i jego testowania. Na końcu pracy zaprezentowano wyniki przeprowadzonych eksperymentów dla opracowanych algorytmów sterowania i porównanie ich pod względem wybranych kryteriów jakości.

2. Przegląd literatury

Jak zaznaczono w poprzednim rozdziale, działania mające na celu modelowanie dynamiki jednoślądów podjęto już ponad 100 lat temu, a pierwszą pracą poświęconą tej tematyce była publikacja Whipple'a z 1899 roku [116]. Przedstawiony tam model jest liniowy i zależy od prędkości postępowej (model zakłada, że prędkość jest stała podczas ruchu):

$$\mathbf{M}\ddot{q} + v\mathbf{C}_1\dot{q} + [g\mathbf{K}_0 + v^2\mathbf{K}_1]q = f \quad (2.1)$$

gdzie:

- $q = \begin{bmatrix} \beta & \alpha \end{bmatrix}^T$ - przestrzeń stanów, gdzie:
 - β - kąt wychylenia roweru od pionu,
 - α - kąt wychylenia kierownicy,
- $f = \begin{bmatrix} T_\beta & T_\alpha \end{bmatrix}^T$, gdzie:
 - T_β - moment zakłócający wychylenie od pionu,
 - T_α - moment sterujący wychyleniem kierownicy,
- \mathbf{M} - macierz mas,
- $v\mathbf{C}_1$ - macierz tłumienia,
- $g\mathbf{K}_0 + v^2\mathbf{K}_1$ - macierz sztywności,
- g - przyspieszenie ziemskie,
- v - prędkość postępową roweru.

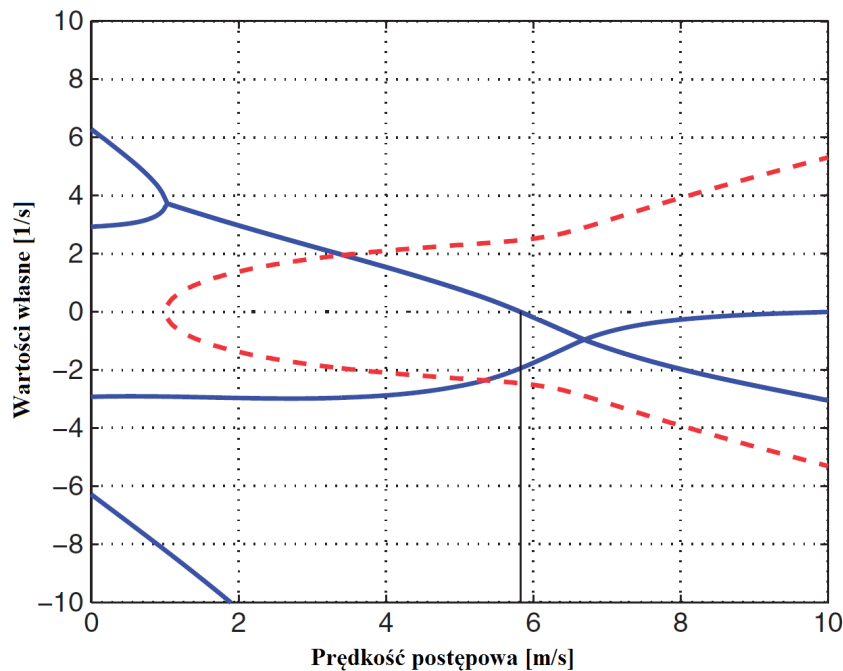
Dla celów teorii sterowania, model (2.1) może zostać zapisany w bardziej klasycznej i częściej spotykanej formie układu równań pierwszego rzędu, gdzie macierze stanu, sterowania i wyjścia są przedstawione w zależności od prędkości postępowej jednoślądu v :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(v)x + B(v)u \\ y = C(v)x \end{cases} \quad (2.2)$$

gdzie:

$$- x = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix},$$

$$- u = T_{\alpha}.$$



Rys. 2.1. Wartości własne λ niekontrolowanego jednośladau w zakresie prędkości $0 < v < 10$ m/s. Linia ciągła reprezentuje część rzeczywistą wartości własnych, a linia przerywana część urojoną. Rower jest stabilny dla zakresu prędkości v między 5.8 m/s a 10 m/s [98]. Wykres wykonany został na podstawie modelu Whipple'a.

W następnych latach, kolejni badacze podejmowali tę tematykę i przedstawiali inne modele opisujące dynamiki pojazdów jednośladowych (ang. *Single Track Vehicle* - **STV**). Stosunkowo nowymi pracami poświęconymi temu tematowi są: [24], [52], [123], [128] (uwzględniają również modelowanie dynamiki kierowcy) i [46]. Poza podejściem do modelowania dynamiki jednoślada autorzy prezentują w nich także różne techniki stabilizacji.

2.1. Metody stabilizacji jednośladau

W literaturze można znaleźć kilka sposobów konstruowania stabilizatora. Są to:

- sterowanie ruchem kierownicy,
- balansowanie dodatkową masą,

- koło reakcyjne,
- stabilizacja żyroskopowa (ang. *Control Moment Gyro* - **CMG**).

2.1.1. Manewrowanie kierownicą

Jednym z najczęściej spotykanych rozwiązań problemu stabilizacji jednośladow jest to oparte na naśladowaniu sterowania przez człowieka, czyli odpowiednie manewrowanie kierownicą. W celu realizacji takiego sterowania jako model dynamiki najczęściej jest używany model Whipple'a (2.1), można go znaleźć między innymi w publikacjach [6] i [48]. Ich autorzy przedstawili sterowanie adaptacyjne oparte na technice *gain scheduling* z regulatorem liniowo-kwadratowym, wyznaczonym dla różnych zakresów prędkości postępowej roweru.

Inne, znacznie bardziej skomplikowane, modele oraz propozycje algorytmów sterowania są przedstawione w pracach Getza [39] i [40]. Sterowanie jest realizowane za pomocą momentu obrotowego przyłożonego do kierownicy oraz momentu zastosowanego do napędu tylnego koła roweru. W ten sposób zapewniono nie tylko stabilizację jednoślada w pionie, lecz także śledzenie zadanej trajektorii. Podobne podejście do sterowania kątem wychylenia i jednoczesnego śledzenia trajektorii przedstawiono w publikacji Chidzonga [18].

Sterowanie jedynie kierownicą, bez zapewnienia zadanej trajektorii i prędkości, znaleźć można w pracach: [28], [36], [45] i [106].

Podobne podejście do stabilizacji jednoślada zaprezentowano w pracy Guo [46], paca ta przedstawia algorytm sterowania oparty na technice linearyzującego sprzężenia zwrotnego, zastosowanego dla modelu opartego o metodę Eulera-Lagrange'a. Publikacja zawiera jedynie rezultaty symulacyjne, natomiast rezultaty doświadczalne przedstawiono w pracy [49] tych samych autorów (na rysunku 2.2 pokazano zrealizowany tam układ).

W pracach [22] i [23] skupiono się na modelowaniu dynamiki jednoślada ze sterowaną kierownicą w celu realizacji systemu zwiększającego bezpieczeństwo motocyklisty przy niskich prędkościach, przedstawiając tylko wyniki symulacyjnych eksperymentów.

Niezaprzeczalną zaletą takiego podejścia jest stosunkowo prosta implementacja, niski koszt realizacji układu i samego sterowania. Z drugiej strony, charakteryzuje się niską odpornością na występujące zakłócenia [73].

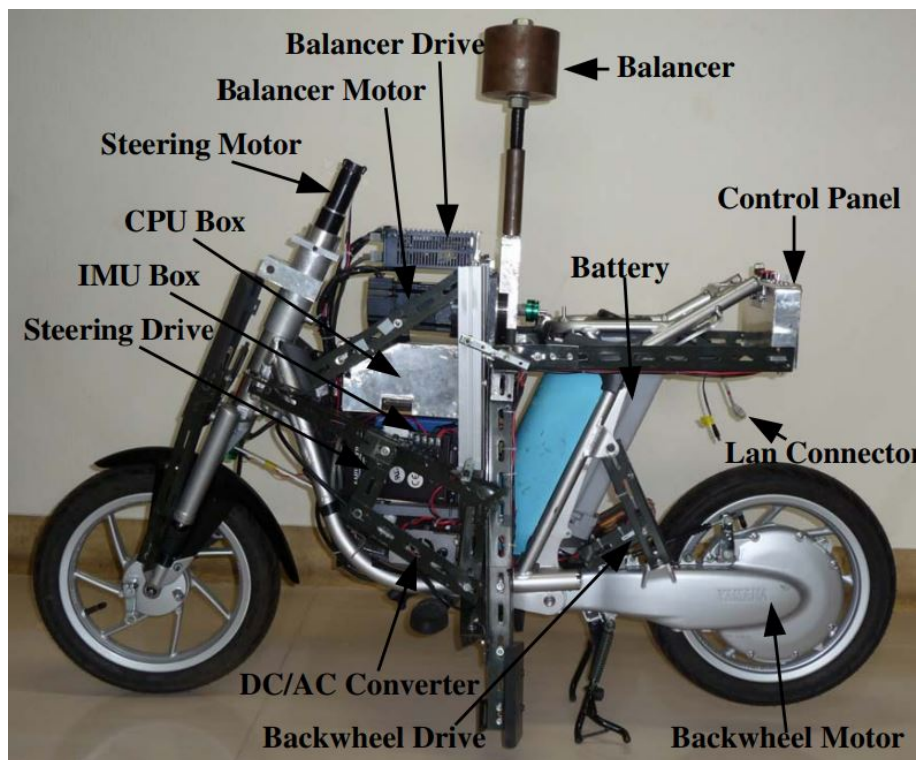
2.1.2. Balans masą

Kolejną, spotykaną w literaturze, metodą na budowę stabilizatora dla jednoślada jest balans dodatkową masą. Wychylenie od pionu wywołuje wychylenie się masy na wysięgniku. Jest to najrzadziej występująca w analizowanych publikacjach metoda stabilizacji, za jej pomocą można uzyskać stosunkowo małe momenty stabilizujące. Ponadto, dodatkowa masa mogłaby sprawiać uczucie dyskomfortu dla kierowcy w systemie wspomagania. Zaletą tego stabilizatora jest natomiast prosta budowa i niski pobór mocy.



Rys. 2.2. Przykładowa realizacja stabilizacji jednośladau za pomocą manewrowania kierownicą [49].

Takie podejście do stabilizacji jednośladau można znaleźć między innymi w pracach [60], [61] i [82].



Rys. 2.3. Przykładowa realizacja stabilizatora z balansem masą [60].

2.1.3. Koło reakcyjne

Koło reakcyjne to koło zamachowe przymocowane osią obrotu prostopadle do pionowej osi jednoślada, które w punkcie równowagi ma zerową prędkość. W zależności od kąta wychylenia od pionu, powinno zacząć się obracać w prawo lub w lewo. Prawdopodobnie najbardziej znanym z literatury przykładem zastosowania koła reakcyjnego do stabilizacji jednośladów jest pojazd *Murata Boy* zaprezentowany przez Muratę w 2005 roku [1]. Zaletą takiej metody stabilizacji jest prosta konstrukcja i niski koszt. Wadami tego rozwiązania jest duże zużycie energii i brak możliwości wygenerowania dużego momentu [73].

Dobrym przykładem zastosowania koła reakcyjnego do stabilizacji jednośladów (poza [1]) są prace Owczarkowskiego [83] i [84]. Zaprezentowano tam projekt jednoślada, jego model matematyczny i wyniki badań symulacyjnych. Podobne podejście i wyniki eksperymentalne przedstawiono również w pracach [34], [59], [62] i [65]. Przykładową realizację konstrukcji tego typu stabilizatora ukazano na rysunku 2.4.

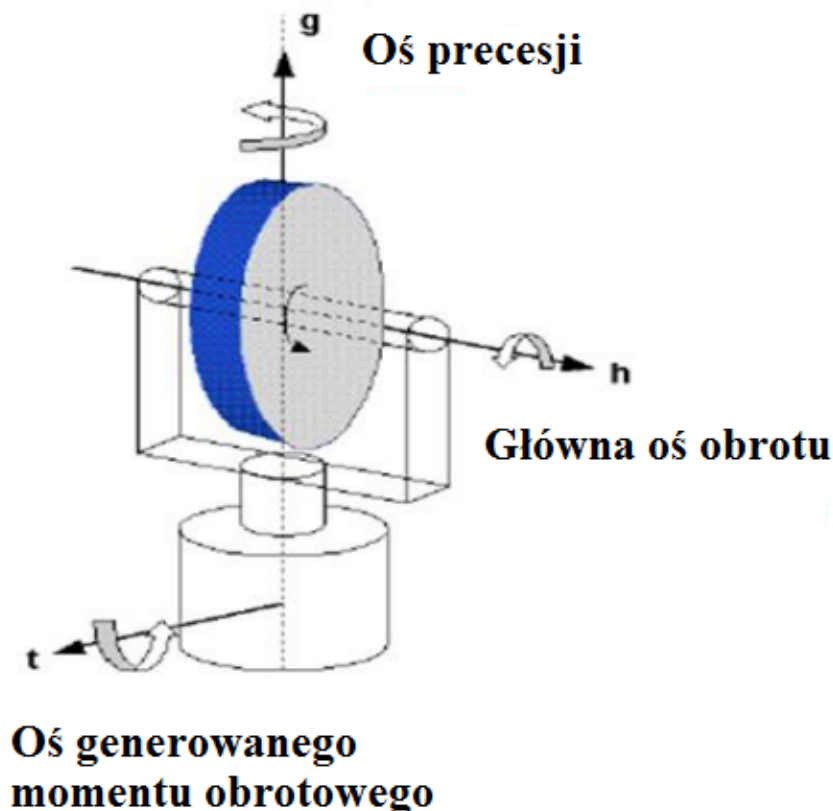
Innym interesującym przykładem zastosowania tego typu stabilizatora jest publikacja [33], w której autorzy zaprezentowali pomysł na futurystyczny, jednoszynowy tramwaj. Warto zaznaczyć, że istnieją również badania nad zastosowaniem koła reakcyjnego w celu poprawy sterowności i stabilizacji pojazdów czterokołowych: [65], [104].



Rys. 2.4. Jednoślad z kołem reakcyjnym (ilustracja pochodzi z [59]).

2.1.4. Stabilizacja żyroskopowa - Control Moment Gyroscope (CMG)

Stabilizator żyroskopowy (ang. *Control Moment Gyro* - **CMG**), podobnie jak koło reakcyjne, jako element stabilizujący stosuje koło zamachowe. Jednak w tym przypadku musi się ono obracać przez cały czas wokół głównej osi obrotu. Poprzez obrót wirującego koła zamachowego wokół osi precesji, prostopadłej do osi głównej, produkowany jest moment stabilizujący wzdłuż trzeciej osi ortogonalnej do osi głównej i osi precesji. Na rysunku 2.5 zaznaczono schemat wymienionych obrotów.



Rys. 2.5. Schemat osi obrotu dla stabilizatora CMG [20].

Typowym zastosowaniem stabilizacji żyroskopowej są układy stabilizujące orientację satelitów [20]. W literaturze i praktyce inżynierskiej istnieją inne zastosowania, dotyczące również stabilizacji jednoślada. Wśród tej grupy stabilizatorów można wyróżnić dwa główne rozwiązania:

- z zastosowaniem dwóch kół zamachowych,
- z zastosowaniem jednego koła zamachowego.

W pierwszej z wymienionych grup, stabilizator zbudowany jest z dwóch kół zamachowych, obracających się w przeciwnych kierunkach wokół głównej osi obrotu, gdzie koła mają przeciwne kierunki precesji. Taki układ powoduje kompensowanie się niepożądanych składowych generowanych momentów obrotowych. Takie podejście do stabilizacji jako pierwszy zaproponował Beznos w pracy [12]. Tego typu stabilizator w różnych konfiguracjach znaleźć można w pracach: [7], [19], [114].



Rys. 2.6. Przykładowa realizacja stabilizatora żyroskopowego [53].

W podejściu z zastosowaniem jednego koła zamachowego występują pewne niepożądane momenty, jednak przez odpowiednie ustawienie można je zminimalizować (zostało to omówione w rozdziale 3). To podejście zostało realizowane w pracach: [21], [53], [74], [103], [108], [111], [120], [127] i [26]. W pracy [109] zaprezentowano realizację algorytmów odpornych.

Rozwiązanie z użyciem stabilizacji żyroskopowej pozwala na bardziej uniwersalną metodę stabilizacji niż sterowanie kierownicą, w tym przypadku możliwa jest stabilizacja stacjonarnego pojazdu. Pozwala ona również na generowanie większych momentów niż balans masą czy koło reakcyjne. Te zalety są jednak okupione wysoką energochłonnością związaną z koniecznością utrzymywania prędkości obrotowej wokół głównej osi koła zamachowego przez cały czas pracy stabilizatora.

2.2. Podsumowanie

W rozdziale wymieniono występujące w literaturze metody realizacji stabilizatora jednośladu. W tabeli 2.1 skrótkowo przedstawiono podsumowanie wad i zalet każdego z opisanych podejść.

Na podstawie przeprowadzonych badań literaturowych stwierdzono, że interesującymi zagadnieniami badawczymi są:

- opracowanie matematycznego modelu jednośladu ze stabilizatorem żyroskopowym, uwzględniającego wpływ ruchów kierownicą i odpowiedniego dla celów sterowania,
- projekt i budowa laboratoryjnego modelu eksperymentalnego,
- projektowanie i eksperymentalna weryfikacja nieliniowych regulatorów,

- wykazanie, że algorytmy nieliniowe zapewniają większy obszar atrakcji niż liniowe,
- porównanie uzyskanych wyników dla różnych typów regulatorów.




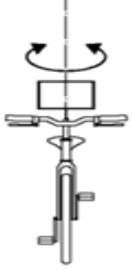
Aktuator	Zalety	Wady
Sterowanie kierownicą 	<ul style="list-style-type: none"> - prosta budowa - niski pobór mocy 	<ul style="list-style-type: none"> - niska odporność na zakłócenia - nieodpowiedni dla stacjonarnych pojazdów - nadający się tylko do pojazdów autonomicznych
Balans masą 	<ul style="list-style-type: none"> - prosta budowa - niski pobór mocy 	<ul style="list-style-type: none"> - małe generowane momenty - niewygodny dla jadącego
Koło reakcyjne 	<ul style="list-style-type: none"> - prosta budowa - krótki czas reakcji 	<ul style="list-style-type: none"> - małe generowane momenty - duża masa - energochłonne
CMG 	<ul style="list-style-type: none"> - mała masa - duże momenty - krótki czas reakcji 	<ul style="list-style-type: none"> - energochłonne - bardziej skomplikowana budowa

Tabela 2.1. Podsumowanie porównania metod stabilizacji

3. Stabilizacja żyroskopowa - Control Moment Gyroscope

3.1. Zastosowania

Najczęściej spotykanym w literaturze zastosowaniem stabilizatora żyroskopowego jest kontrola orientacji położenia satelitów. Istnieje szereg publikacji, w których autorzy przedstawiają algorytmy sterowania, są to na przykład prace [75], [76] - prezentujące sterowanie **CMG** dla małych satelitów i praca [102] - dotycząca sterowania odpornego. Testowane są różne konfiguracje i ustawienia zespołu kół zamachowych: [27], [92] czy [107]. Można również znaleźć porównanie z metodą opartą na kole reakcyjnym [112].

W ostatnich latach zwiększyło się też zainteresowanie stabilizacją żyroskopową pojazdów jednośladowych. Przegląd literatury w tym zakresie został przedstawiony w punkcie 2.1.4.

Istnieją również znacznie bardziej niszowe zastosowania **CMG**. Można odnaleźć publikacje, w których wykorzystuje się je do stabilizacji w łodziach podwodnych [121], czy w robotyce dla robotów humanoidalnych [11]. Interesujące jest też proponowane zastosowanie do pomocy w rehabilitacji (ang. *human balancing aid*) [11].

Warto wspomnieć także o literaturze dotyczącej stabilizacji żyroskopowej bez nakierunkowania na konkretne zastosowanie: [13], [19], [122]. Bardzo dobrym opracowaniem dotyczącym szerokiego spektrum stabilizacji żyroskopowej jest rozprawa doktorska [90].

W tym rozdziale, w kolejnych punktach, przedstawiono wyprowadzenie modelu matematycznego stabilizatora żyroskopowego w celu zastosowania go do stabilizacji jednośladu. Zaprezentowano, w jaki sposób generuje on moment stabilizujący i jakimi wzorami się go wyznacza. Pokazano również, jak dobrano parametry stabilizatora dla wybranego zastosowania.

3.2. Model matematyczny

Moment siły generowany przez stabilizator żyroskopowy (**CMG**) można wyznaczyć zgodnie z równaniem (3.1) - za [38] i [91] :

$$\vec{M} = J\vec{\omega} \times \vec{\Omega} \quad (3.1)$$

gdzie:

$$- \mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} - \text{tensor momentu bezwładności koła zamachowego},$$

$$- \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} - \text{prędkość obrotu wokół osi układu współrzędnych},$$

$$- \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} - \text{wektor prędkości obrotu układu współrzędnych (precesja)}.$$

Wylicza się z tego ogólną wartość momentu bezwładności generowanego przez **CMG**:

$$\vec{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} J_x(\omega_y\Omega_z - \omega_z\Omega_y) \\ J_y(\omega_z\Omega_x - \omega_x\Omega_z) \\ J_z(\omega_x\Omega_y - \omega_y\Omega_x) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Jednak momenty pokazane w równaniu (3.2) są przedstawione w lokalnym układzie współrzędnych związanych z kołem zamachowym. Aby otrzymać wektor generowanych momentów w głównym układzie współrzędnych jednoślada, należy prędkość obrotową $\vec{\omega}$ transformować do układu współrzędnych związanego z pojazdem:

$$\vec{\omega}^G = R_x^{-1}(\beta)R_i^{-1}(\gamma)\vec{\omega} \quad (3.3)$$

gdzie:

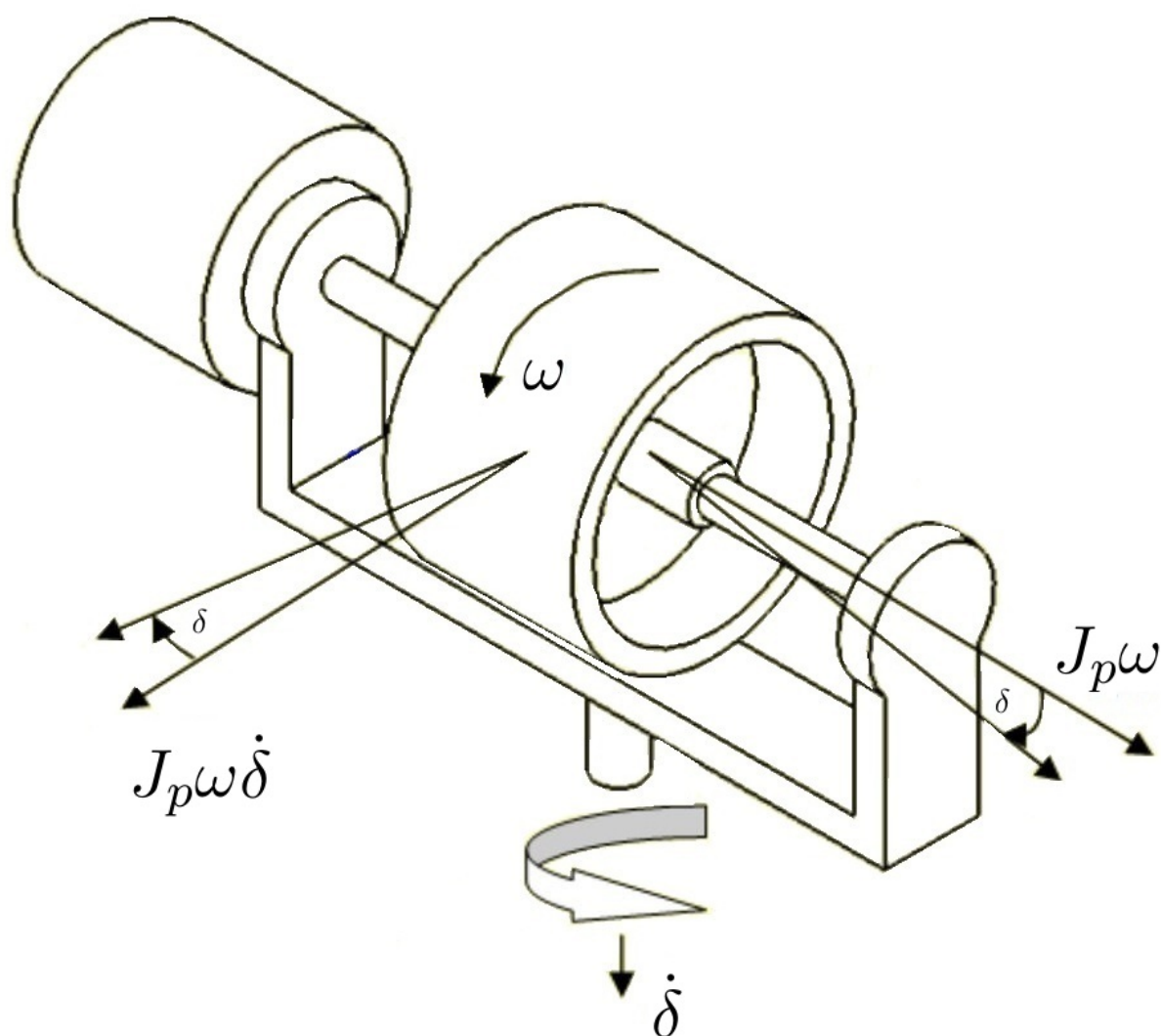
$$- R_x(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} - \text{macierz obrotu wokół osi OX, to obrót związany z wychyle-} \\ \text{niem pojazdu od pionu},$$

- $R_i(\gamma)$ - macierz obrotu względem osi precesji, gdzie za i można podstawić y lub z , wówczas otrzymano odpowiednio:

$$- R_y(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} - \text{macierz obrotu wokół osi OY},$$

$$- R_z(\delta) = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{macierz obrotu wokół osi OZ},$$

- założono, że obrót pojazdu wokół osi OY jest stosunkowo niewielki i można pominąć macierz $R_y(\gamma)$ z nim związaną,



Rys. 3.1. Schemat działania CMG [74].

- założono, że prędkość obrotowa pojazdu wokół osi OZ jest stosunkowo mała względem prędkości obrotu koła zamachowego $\dot{\delta}$ i może zostać pominięta przy wyznaczaniu momentu siły.

Po podstawieniu nowej prędkości obrotowej $\vec{\omega}^G$ do równania (3.2) w miejsce $\vec{\omega}$ otrzymuje się wartość generowanych momentów w głównym układzie współrzędnych jednośladu:

$$\vec{M}^G = J\vec{\omega}^G \times \vec{\Omega}. \quad (3.4)$$

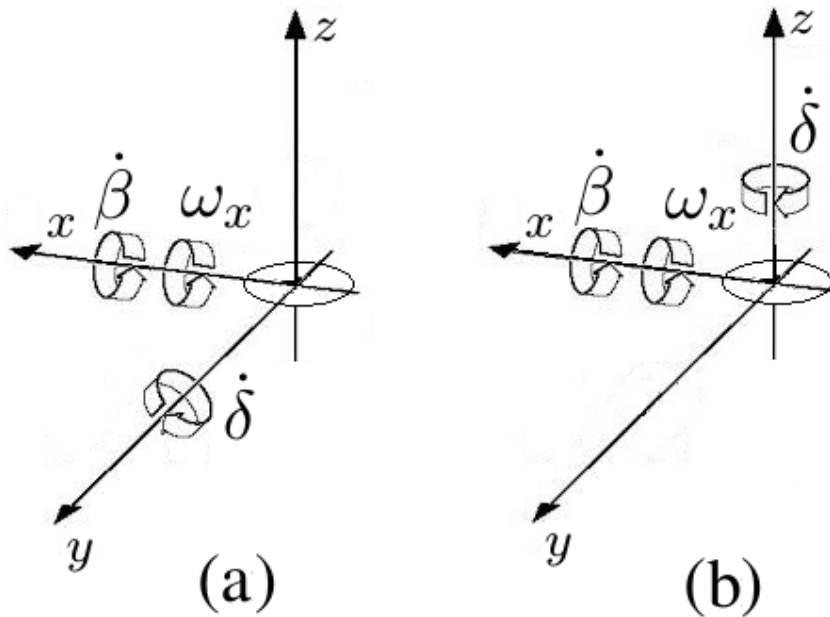
3.2.1. Dyskusja orientacji i położenia CMG

Można wyróżnić trzy podstawowe położenia koła zamachowego z główną osią obrotu wzdłuż każdej z trzech osi układu współrzędnych: OX, OY i OZ. Dodatkowo, dla każdego z tych przypadków można rozważyć pod-przypadek dla precesji wokół jednej z pozostałych dwóch osi. W następnych punktach przedstawiono szczegóły dla każdego z wymienionych wariantów.

3.2.1.1. Główna oś obrotu wzdłuż osi OX

W tym przypadku początkowa wartość wektora prędkości obrotowej $\vec{\omega}$ dla koła zamachowego ma postać:

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_r & 0 & 0 \\ 0 & J_p & 0 \\ 0 & 0 & J_p \end{bmatrix}.$$



Rys. 3.2. Schemat obrotów CMG dla głównej osi zgodnej z OX: (a) precesja wokół osi OY, (b) precesja wokół osi OZ.

– Precesja wokół osi OY:

Wektor $\vec{\Omega}$ zależy od prędkości wychylenia roweru $\dot{\beta}$ (wokół osi OX) oraz precesji CMG wokół osi OY:

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} \dot{\beta} & \dot{\delta} & 0 \end{bmatrix}^T,$$

wówczas równanie (3.2) upraszcza się do poniższej postaci (3.5):

$$\vec{\mathbf{M}}_{OX-OY} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_p \omega_x \dot{\delta} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Moment globalny wyznacza się używając $\vec{\omega}^G = R_x(\beta)R_y(\delta)\vec{\omega}$:

$$\vec{\mathbf{M}}_{OX-OY}^G = \begin{bmatrix} J_r \omega_x \dot{\delta} \cos \beta \sin \delta \\ \omega_x (J_r \dot{\delta} \cos \delta - J_p \dot{\beta} \sin \beta \sin \delta) \\ -J_p \omega_x \dot{\beta} \sin \beta \sin \delta \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

– Precesja wokół osi OZ:

Wektor $\vec{\Omega}$ zależy od prędkości wychylenia roweru $\dot{\beta}$ (wokół osi OX) oraz precesji **CMG** wokół osi OZ:

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} \dot{\beta} & 0 & \dot{\delta} \end{bmatrix}^T,$$

wówczas równanie (3.2) upraszcza się do poniższej postaci (3.7):

$$\vec{M}_{OX-OZ} = \begin{bmatrix} 0 \\ -J_p \omega_x \dot{\delta} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

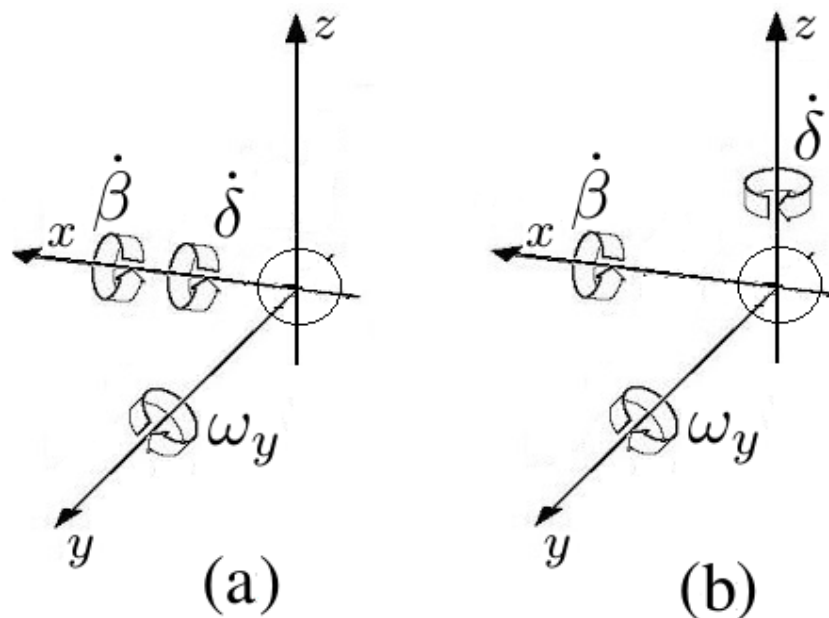
Moment globalny wyznacza się używając $\vec{\omega}^G = R_x(\beta)R_z(\delta)\vec{\omega}$:

$$\vec{M}_{OX-OZ}^G = \begin{bmatrix} -J_p \omega_x \dot{\delta} \cos \beta \sin \delta \\ \omega_x (J_p \dot{\beta} \sin \beta \sin \delta - J_r \dot{\delta} \cos \delta) \\ J_p \omega_x \dot{\beta} \cos \beta \sin \delta \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

3.2.1.2. Główna oś obrotu wzdłuż osi OY

W tym przypadku początkowa wartość wektora prędkości obrotowej $\vec{\omega}$ dla koła zamachowego ma postać:

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_y \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_p & 0 & 0 \\ 0 & J_r & 0 \\ 0 & 0 & J_p \end{bmatrix}.$$



Rys. 3.3. Schemat obrotów **CMG** dla głównej osi zgodnej z OY: (a) precesja wokół osi OX, (b) precesja wokół osi OZ.

– Precesja wokół osi OX:

Wektor $\vec{\Omega}$ zależy od prędkości wychylenia roweru $\dot{\beta}$ (wokół osi OX) oraz precesji CMG wokół osi OX:

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} (\dot{\beta} + \dot{\delta}) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

wówczas równanie (3.2) upraszcza się do poniższej postaci (3.9):

$$\vec{M}_{OY-OX} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -J_p \omega_y (\dot{\delta} + \dot{\beta}) \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Moment globalny wyznacza się używając $\vec{\omega}^G = R_x(\beta + \delta)\vec{\omega}$:

$$\vec{M}_{OY-OX}^G = \begin{bmatrix} 0 \\ J_p \omega_y (\dot{\beta} + \dot{\delta}) \sin(\beta + \delta) \\ J_r \omega_y (\dot{\beta} + \dot{\delta}) \cos(\beta + \delta) \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

– Precesja wokół osi OZ:

Wektor $\vec{\Omega}$ zależy od prędkości wychylenia roweru $\dot{\beta}$ (wokół osi OX) oraz precesji CMG wokół osi OZ:

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} \dot{\beta} & 0 & \dot{\delta} \end{bmatrix}^T,$$

wówczas równanie (3.2) upraszcza się do poniższej postaci (3.11):

$$\vec{M}_{OY-OZ} = \begin{bmatrix} J_p \omega_y \dot{\delta} \\ 0 \\ -J_p \omega_y \dot{\beta} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

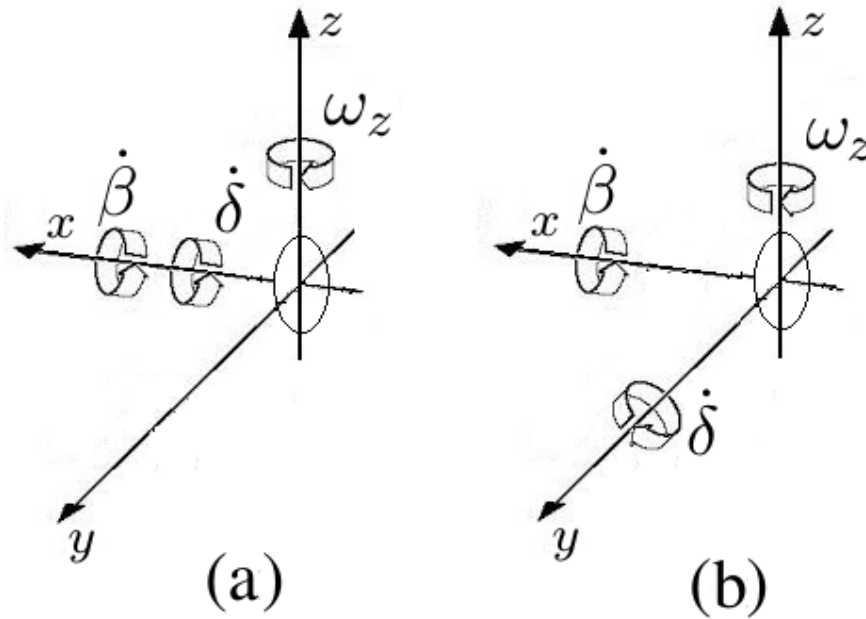
Moment globalny wyznacza się używając $\vec{\omega}^G = R_x(\beta)R_z(\delta)\vec{\omega}$:

$$\vec{M}_{OY-OZ}^G = \begin{bmatrix} J_r \omega_y \dot{\delta} \cos \beta \cos \delta \\ -J_p \omega_y (\dot{\beta} \sin \beta \cos \delta + \dot{\delta} \sin \delta) \\ -J_r \omega_y \dot{\beta} \cos \beta \cos \delta \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

3.2.1.3. Główna oś obrotu wzdłuż osi OZ

W tym przypadku początkowa wartość wektora prędkości obrotowej $\vec{\omega}$ dla koła zamachowego ma postać:

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_p & 0 & 0 \\ 0 & J_p & 0 \\ 0 & 0 & J_r \end{bmatrix}.$$



Rys. 3.4. Schemat obrotów CMG dla głównej osi zgodnej z OZ: (a) precesja wokół osi OX, (b) precesja wokół osi OY.

– Precesja wokół osi OX:

Wektor $\vec{\Omega}$ zależy od prędkości wychylenia roweru $\dot{\beta}$ (wokół osi OX) oraz precesji CMG wokół osi OX:

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} \dot{\beta} & \dot{\delta} & 0 \end{bmatrix}^T,$$

wówczas równanie (3.2) upraszcza się do poniższej postaci (3.13):

$$\vec{M}_{OZ-OX} = \begin{bmatrix} 0 \\ J_y \omega_z (\dot{\beta} + \dot{\delta}) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Moment globalny wyznacza się używając $\vec{\omega}^G = R_x(\beta + \delta)\vec{\omega}$:

$$\vec{M}_{OZ-OX}^G = \begin{bmatrix} 0 \\ J_r \omega_z (\dot{\beta} + \dot{\delta}) \cos(\beta + \delta) \\ J_p \omega_z (\dot{\beta} + \dot{\delta}) \sin(\beta + \delta) \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

– Precesja wokół osi OY:

Wektor $\vec{\Omega}$ zależy od prędkości wychylenia roweru $\dot{\beta}$ (wokół osi OX) oraz precesji CMG wokół osi OY:

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} \dot{\beta} & 0 & \dot{\delta} \end{bmatrix}^T,$$

wówczas równanie (3.2) upraszcza się do poniższej postaci (3.15):

$$\vec{M}_{OZ-OY} = \begin{bmatrix} -J_p \omega_z \dot{\delta} \\ J_p \omega_z \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Moment globalny wyznacza się używając $\vec{\omega}^G = R_x(\beta)R_y(\delta)\vec{\omega}$:

$$\vec{M}_{OZ-OY}^G = \begin{bmatrix} -J_r\omega_z\dot{\delta}\cos\beta\cos\delta \\ J_r\omega_z\dot{\beta}\cos\beta\cos\delta \\ J_r\omega_z(\dot{\beta}\sin\beta\cos\delta - \dot{\delta}\sin\delta) \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

3.2.1.4. Analiza ułożenia koła zamachowego

Można zauważyć, że spośród sześciu możliwych ustawień początkowych **CMG**, dwa (OY-OX i OZ-OX) generują zerowy moment obrotowy wokół osi OX, kolejne dwa (OX-OY i OX-OZ) są proporcjonalne do funkcji $\sin\delta$, zatem znaczący moment będzie generowany tylko w przypadku znaczącego odchylenia **CMG**. Pozostałe dwa przypadki (OY-OZ i OZ-OY) generują moment proporcjonalny do funkcji $\cos\beta\cos\delta$, a więc generują duży moment już przy małym wychyleniu. Ostatecznie do realizacji wybrany został wariant OY-OZ.

Stosując wymienione w rozdziale 3.2 założenie o niewielkim kącie wychylenia ramy od pionu, czyli $\beta \approx 0$, można uprościć wyrażenie opisujące generowany moment (3.12) do postaci (3.17) i ta właśnie postać będzie dalej rozważana:

$$\vec{M}^G = \begin{bmatrix} J_p\omega\dot{\delta}\cos\delta \\ J_r\omega\dot{\delta}\sin\delta \\ -J_p\omega\dot{\beta}\cos\delta \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

3.2.2. Projekt koła zamachowego

Podczas procesu projektowania odpowiedniego koła zamachowego musi zostać uwzględniony moment siły możliwy do wygenerowania przez stabilizator. Istotnym parametrem projektowym jest jego wytrzymałość, pożądane jest, aby prędkość obrotowa $\vec{\omega}$ była możliwie duża, co naraża element na odkształcenia i uszkodzenie, dlatego punkt ten prezentuje analizę skupioną na tych dwóch zagadnieniach.

3.2.2.1. Moment bezwładności

Po wyznaczeniu momentu siły generowanego przez **CMG** w funkcji jego momentu bezwładności J oraz prędkości obrotowej wokół głównej osi obrotu $\vec{\omega}$, można wyznaczyć wymagane parametry koła zamachowego:

- jego moment bezwładności - przede wszystkim J_r ,
- prędkość obrotową koła zamachowego - ω ,
- prędkość precesji **CMG** - Ω .

W przybliżeniu można przyjąć, że jednośląd jest wahadłem odwróconym o parametrach:

- masie punktowej M ,
- wysokości h .

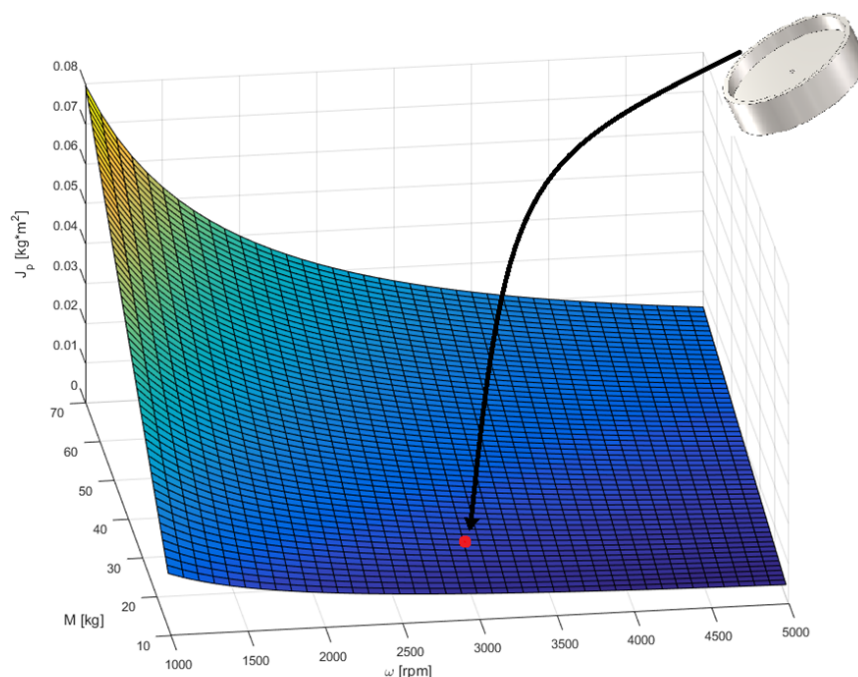
Można również założyć maksymalne wychylenie β_{max} , dla którego system stabilizujący powinien być w stanie ustabilizować jednośląd. Dodatkowo można założyć maksymalną prędkość precesji Ω_{max} jako związaną z maksymalną prędkością silnika obracającego CMG i uznać za parametr dany. Stąd moment (równanie (3.17)) generowany na osi OX musi być większy od momentu związanego z siłą grawitacji:

$$Mgh \sin \beta_{max} \leq J_r \omega \dot{\delta} \implies J_r \geq \frac{Mgh \sin \beta_{max}}{\omega \Omega_{max}}. \quad (3.18)$$

Przyjmując konfigurację rowerka dziecięcego, można przyjąć następujące wartości dla parametrów uproszczonego modelu:

- $M = 20\text{kg}$,
- $\beta_{max} = 10^\circ$,
- $\dot{\delta} = 500 \frac{\text{obr.}}{\text{min.}}$.

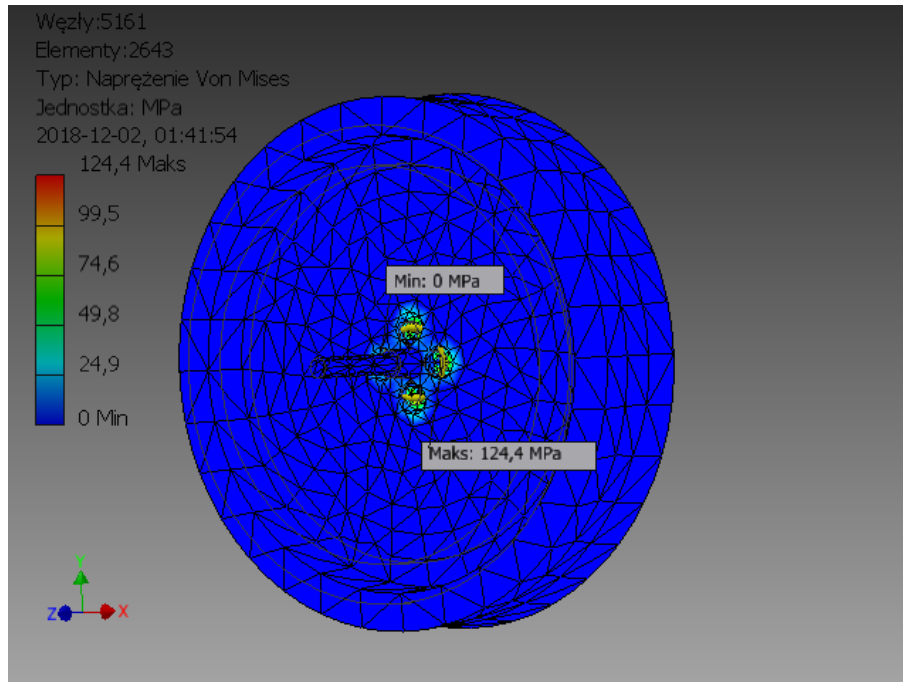
Funkcję generowanego momentu w zależności od ω i J_r przedstawiono na rysunku (3.5).



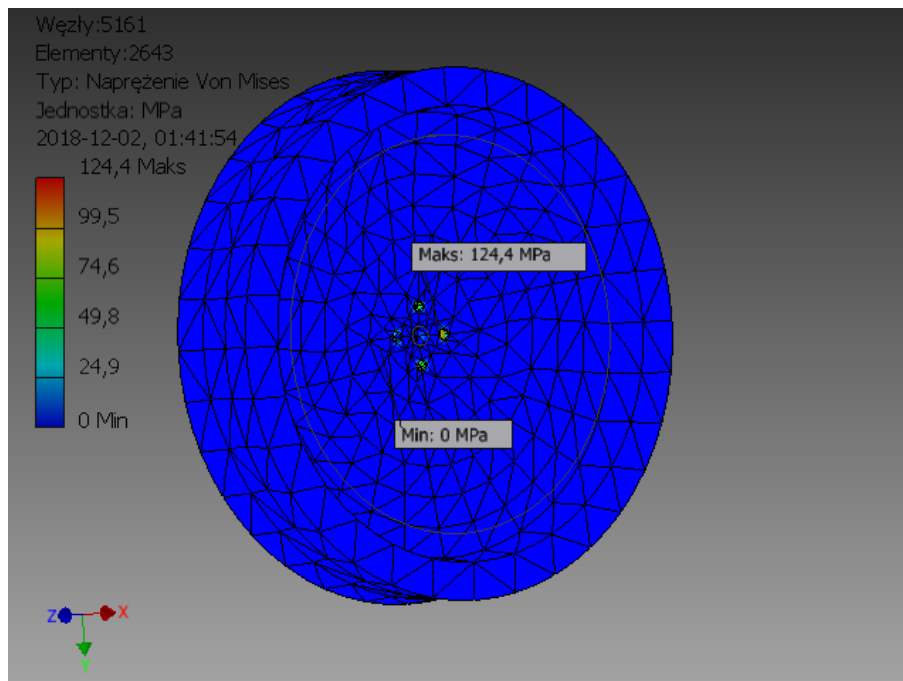
Rys. 3.5. Wykres wymaganego momentu bezwładności w zależności od prędkości obrotowej koła zamachowego i masy jednoślądu.

3.2.2.2. Analiza naprężeń

W technice stabilizacji żyroskopowej koło zamachowe obraca się z bardzo dużą prędkością. Dlatego zasadnym jest, aby zbadać powstające w nim naprężenia ze względu na możliwe uszkodzenia, które mogą wystąpić w czasie pracy.



Rys. 3.6. Napężenia w kole zamachowym - widok z przodu.

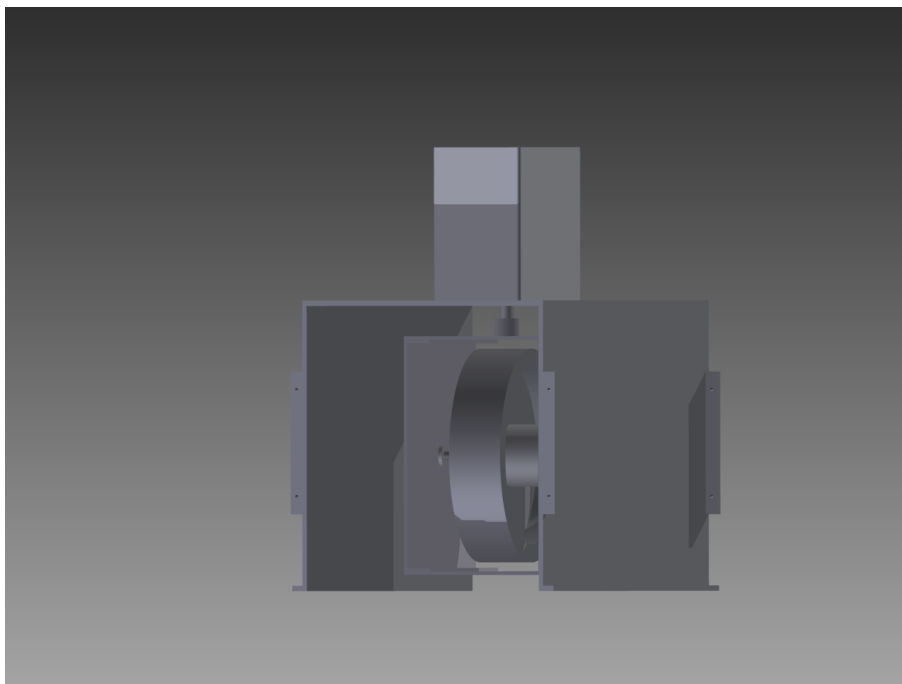


Rys. 3.7. Napężenia w kole zamachowym - widok z tyłu.

W trakcie realizacji pracy do tej analizy posłużono się oprogramowaniem Inventor, przyjmując model naprężeń von Misesa. Wyniki analizy przedstawiono na rysunkach 3.6 i 3.7.

Zaprezentowane rezultaty pokazują, że dla założonej prędkości obrotowej, występujące naprężenia nie powinny przekraczać naprężeń dopuszczalnych w żadnym punkcie koła zamachowego. Można również zauważyć, że największe wartości naprężeń występują w punktach mocowania do silnika.

Na rysunku 3.8 zaprezentowano projekt stabilizatora wykonany i wyrenderowany w programie Inventor.



Rys. 3.8. Projekt stabilizatora.

4. Matematyczny model jednośladu ze stabilizatorem żyroskopowym

4.1. Założenia upraszczające model

Kompleksowy model dynamiki jednośladu musiałby uwzględniać bardzo dużą liczbę czynników, w tym takie zjawiska jak na przykład: dynamika opony, tarcie podłoża, wpływ jego nierówności, itp. Poza trudnością wyprowadzenia, taki model przysparza również wielu trudności przy analizie jego dynamiki, dlatego synteza sterowania staje się utrudniona. Aby uzyskać model matematyczny, który obejmuje najważniejsze własności dynamiki istotne dla celów sterowania, jednocześnie nie komplikując bardzo modelu, w niniejszej pracy zaproponowano następujące założenia upraszczające:

- jednoślad porusza się ze stałą prędkością postępową,
- nie występuje poślizg poprzeczny i podłużny kół,
- opona ma zerową grubość,
- jednoślad porusza się po płaskiej powierzchni,
- masę kierownicy uznano za pomijalnie małą.

4.2. Analiza modelu

Dla każdego z przedstawionych w tym rozdziale modeli dynamiki została przeprowadzona analiza właściwości istotnych ze względu na projektowanie układów regulacji automatycznej. Właściwościami tymi są:

- stabilność wokół punktu pracy,
- sterowalność,
- obserwowalność.

W następnych rozdziałach opisano, jak przeprowadzona została analiza każdej z wyżej wymienionych właściwości.

Wyprowadzone modele dynamiki są układami nieliniowymi, dlatego dla uproszczenia analizy wybranych właściwości posłużono się przybliżeniem liniowym w sensie Taylora (4.1):

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x(t)} \Big|_{x(t)=x^{eq}}}_{A} x(t) + \underbrace{\frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u(t)} \Big|_{u(t)=u^{eq}}}_{B} u(t) + o(r^2). \quad (4.1)$$

Każdy z zaproponowanych modeli został przedstawiony w następujący sposób:

- przedstawienie modelu nieliniowego,
 - analiza sterowalności,
- przedstawienie modelu zlinearyzowanego zgodnie z (4.1), a następnie:
 - analiza stabilności,
 - analiza sterowalności,
 - analiza obserwowalności,
- przedstawienie modelu liniowego w postaci transmitancji.

4.2.1. Stabilność

Stabilność wyprowadzonych modeli została zweryfikowana za pomocą pośredniej metody Lapunowa, która polega na badaniu wartości własnych macierzy A układu zlinearyzowanego (4.1). Jeżeli wszystkie wartości własne leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej, to punkt równowagi jest lokalnie asymptotycznie stabilny. Gdy któraś z nich jest dodatnia, to punkt równowagi jest niestabilny, w przeciwnym razie nie można wnioskować o stabilności punktu równowagi i konieczne jest zastosowanie bezpośredniej metody Lapunowa.

4.2.2. Sterowalność

Aby wyprowadzony model był użyteczny dla celów sterowania, musi zostać zweryfikowany pod względem sterowalności: czy jest sterowalny i w jakim zakresie zmiennych stanu. W celu weryfikacji sterowalności systemu nieliniowego posłużono się twierdzeniem (4.1), zacytowanym tutaj za pracą Whalena [115].

Twierdzenie 4.1. *Jeśli w układzie nieliniowym:*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

gdzie: $x \in R^n$, $u \in R$, macierz sterowalności Q zdefiniowana jako:

$$Q = \begin{bmatrix} g & [f, g] & [f, ad_f^1 g] & \dots & [f, ad_f^{n-1} g] \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

jest rzędu n , to wtedy układ jest sterowalny.

Symbol $[f, g]$ jest tak zwanymi nawiasami Lie'go, które są zdefiniowane zgodnie z [63]:

$$\begin{aligned} ad_f^0 g &= g, \\ ad_f^1 g &= [f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g, \\ ad_f^2 g &= [f, [f, g]] = \frac{\partial(ad_f^1 g)}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x}(ad_f^1 g), \\ &\dots \\ ad_f^n g &= [f, ad_f^{n-1} g]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

W przypadku układów liniowych, jak w równaniu (2.2), macierz sterowania (4.2) redukuje się do postaci (4.4) znanej na przykład z pracy Kaczorka [58]:

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

4.2.3. Obserwowalność

Badane modele dynamiki są modelami nieliniowymi, lecz z liniową funkcją obserwacji, dlatego uznano, że badanie tylko lokalnej obserwowalności liniowej aproksymacji w sensie Taylora jest wystarczające.

Algebraiczny warunek obserwowalności układu liniowego można podać za [58] jako pełny rząd macierzy obserwowalności M , która jest definiowana zgodnie z (4.5).

$$M = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

gdzie:

- C - macierz obserwacji,
- $A = \frac{\partial f(x,u)}{\partial x} \Big|_{x_{eq}}$ - macierz przejścia układu zlinearyzowanego (4.1).

Do analizy obserwowalności modelu zastosowano aproksymację liniową. Metody badania obserwowalności układów nieliniowych można znaleźć w pracach [5], [87], [100].

4.3. Parametry

Dla modelu matematycznego sterowanego obiektu definiuje się następujące parametry:

- a - odległość pomiędzy środkami kół,
- $a_r(\alpha)$ - przyspieszenie odśrodkowe roweru,

- α - kąt wychylenia kierownicy,
- B_m - współczynnik tarcia w łożysku silnika obracającego kołem zamachowym,
- b_{fr} - odległość pomiędzy tylnym kołem a środkiem ciężkości ramy roweru,
- b_{fl} - odległość pomiędzy tylnym kołem a środkiem ciężkości koła zamachowego,
- x_1 - wychylenie ramy roweru od pionu,
- x_3 - kąt wychylenia koła zamachowego,
- x_4 - prędkość wychylania koła zamachowego,
- g - przyspieszenie ziemskie,
- h_{fr} - wysokość środka ciężkości ramy rowerowej,
- h_{flw} - wysokość środka ciężkości koła zamachowego,
- $J_1 = \frac{1}{2}m_w r^2$ - moment bezwładności koła rowerowego względem osi rowerowej,
- $J_2 = \frac{1}{2}m_w r^2$ - moment bezwładności koła rowerowego względem osi OX,
- $J_3 = m_w r^2$ - moment bezwładności koła względem piasty,
- J_4 - moment bezwładności koła zamachowego względem osi OX,
- J_r - moment bezwładności koła zamachowego względem osi OY,
- J_p - moment bezwładności koła zamachowego względem osi OZ,
- Φ - odległość pomiędzy środkiem ciężkości przedniego koła a jego osią obrotu,
- m_{fr} - masa ramy roweru,
- m_w - masa koła rowerowego (założono, że przednie i tylne koła są identyczne),
- m_{flw} - masa koła zamachowego,
- $p_{fr} = \frac{b_{fr}}{a}$,
- $p_{flw} = \frac{b_{flw}}{a}$,
- r - promień koła rowerowego,
- T_m - moment siły sterujący kołem zamachowym,
- ω - prędkość obrotu koła zamachowego wokół głównej osi obrotu,
- v - prędkość postępową jednoślada.

Przykładowe wartości wymienionych parametrów dla rowerka dziecięcego i roweru dla osoby dorosłej przedstawione zostały w tabeli 4.1.

Symbol	Rower dla osoby dorosłej	Rowerek dziecięcy
m_{fr}	15 [kg]	5 [kg]
m_w	2 [kg]	1 [kg]
m_{flw}	3.86 [kg]	3.86 [kg]
h_{fr}	0.45 [m]	0.30 [m]
r	0.33 [m]	0.2 [m]
l	1 [m]	0.6 [m]
J_r	0.0132 [kgm ²]	0.0132 [kgm ²]
J_p	0.0325 [kgm ²]	0.0325 [kgm ²]
B_m	0.003 [kgm ² /s]	0.003 [kgm ² /s]
Φ	0.08 [m]	0.08 [m]
ω	2450 [obr./min]	2450 [obr./min]
v	10 [km/h]	10 [km/h]

Tabela 4.1. Założone wartości wymienionych parametrów modelu jednoślada.

4.4. Dyskretyzacja

W praktyce inżynierskiej sterowanie jest realizowane za pomocą układów cyfrowych, zatem mierzone wyjście i aplikowane sterowanie jest w rzeczywistości sygnałem zdyskretyzowanym z czasem dyskretyzacji T_s . Czas próbkowania jest bardzo istotny, gdyż jego zły dobór może doprowadzić do destabilizacji układu, może on być wybrany zgodnie z formułą (4.6) [97]:

$$T_s \leq \frac{\pi}{a\omega_b} \quad (4.6)$$

gdzie:

- ω_b - częstotliwość graniczna,
- $\left. \begin{array}{l} a \in (10, 20) - \text{gdy } \omega_n > \omega_b \\ a \in (2, 5) - \text{w innym przypadku} \end{array} \right\}$,
- ω_n - częstotliwość zakłóceń.

Dla założonego regulatora częstotliwość graniczna wynosi 9 Hz, założono współczynnik $a = 20$, co daje czas próbkowania $T_s = 0.015s$. Jest to czas, który w pełni wystarczy na wykonanie odczytu z wszystkich czujników, zadanie sterowania oraz obsługę wymaganej komunikacji między elementami systemu.

4.4.1. Linearyzacja - dyskretyzacja

Pierwsze podejście do dyskretyzacji, polega przede wszystkim na linearyzacji układu nieliniowego, zdefiniowanej zgodnie z równaniem (4.1).

Ten zlinearyzowany model jest poddany dyskretyzacji z czasem dyskretyzacji T_s , dzięki czemu otrzymuje się model w postaci:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \quad (4.7)$$

gdzie:

$$A_d = e^{AT_s}, B_d = \left(\int_0^{T_s} e^{A\tau} d\tau \right) B. \quad (4.8)$$

Zaletą tego podejścia jest to, że można w ten sposób poddać dyskretyzacji każdy układ nieliniowy.

4.4.2. Dyskretyzacja wprost

W pewnych przypadkach możliwa jest dyskretyzacja wprost układu nieliniowego, zgodnie z równaniem (4.9) [51]:

$$x_{k+1} = x_k + \int_{T_k}^{T(K+1)} f(x(t), u(t)) dt. \quad (4.9)$$

To podejście daje zazwyczaj lepsze rezultaty, jednak powyższa całka nie zawsze jest możliwa do wyznaczenia.

4.5. Model kinematyki

Jednym z najbardziej kluczowych czynników wpływających na dynamikę jednoślada, jego zachowanie lub utratę stabilności, jest przyłożona do niego siła odśrodkowa. Dlatego tak ważne jest, by wyznaczyć ją tak precyzyjnie, jak to jest możliwe. Zakładając brak poślizgu poprzecznego i podłużnego, można przedstawić uproszczony schemat geometryczny, rysunek 4.1, który może posłużyć do wyznaczenia siły odśrodkowej [9], na jego podstawie można sformułować zależność:

$$r_0 = \frac{a}{\tan \alpha} \quad (4.10)$$

gdzie:

- r_0 - promień koła, po którym porusza się środek tylnego koła,
- a - odległość pomiędzy środkami koła tylnego i przedniego,
- α - kąt skrętu kierownicy.

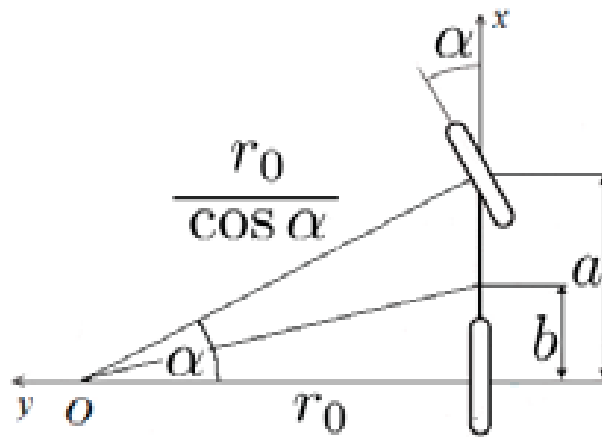
Do wyznaczenia promienia, po którym porusza się centrum masy jednoślada, można użyć poniższej formuły:

$$r = \sqrt{a^2 + r_0^2} = \sqrt{\frac{a^2 \tan^2 \alpha + b^2}{\tan^2 \alpha}}. \quad (4.11)$$

Znając promień koła dla środka masy, można wyznaczyć przyśpieszenie odśrodkowe (4.12).

$$a_r = \frac{v}{r} + \frac{dv_y}{dt} \quad (4.12)$$

gdzie:



Rys. 4.1. Schemat prezentujący promień skrętu w zależności od kąta wychylenia kierownicy.

$$- v_y = \frac{a}{b} v \tan \alpha.$$

Podstawiając równanie (4.11) do równania (4.12) otrzymuje się następujące wyrażenie (4.13) na przyspieszenie odśrodkowe:

$$a_r(\alpha) = \sqrt{\frac{\tan^2 \alpha}{a^2 \tan^2 \alpha + b^2} \frac{v_0^2}{b^2} + \frac{a}{b} v \frac{\dot{\alpha}}{\cos^2 \alpha}}. \quad (4.13)$$

4.6. Model dynamiki

W celu opracowania modelu dynamiki jednoślądu z CMG założono, że pojazd składa się z kilku brył sztywnych:

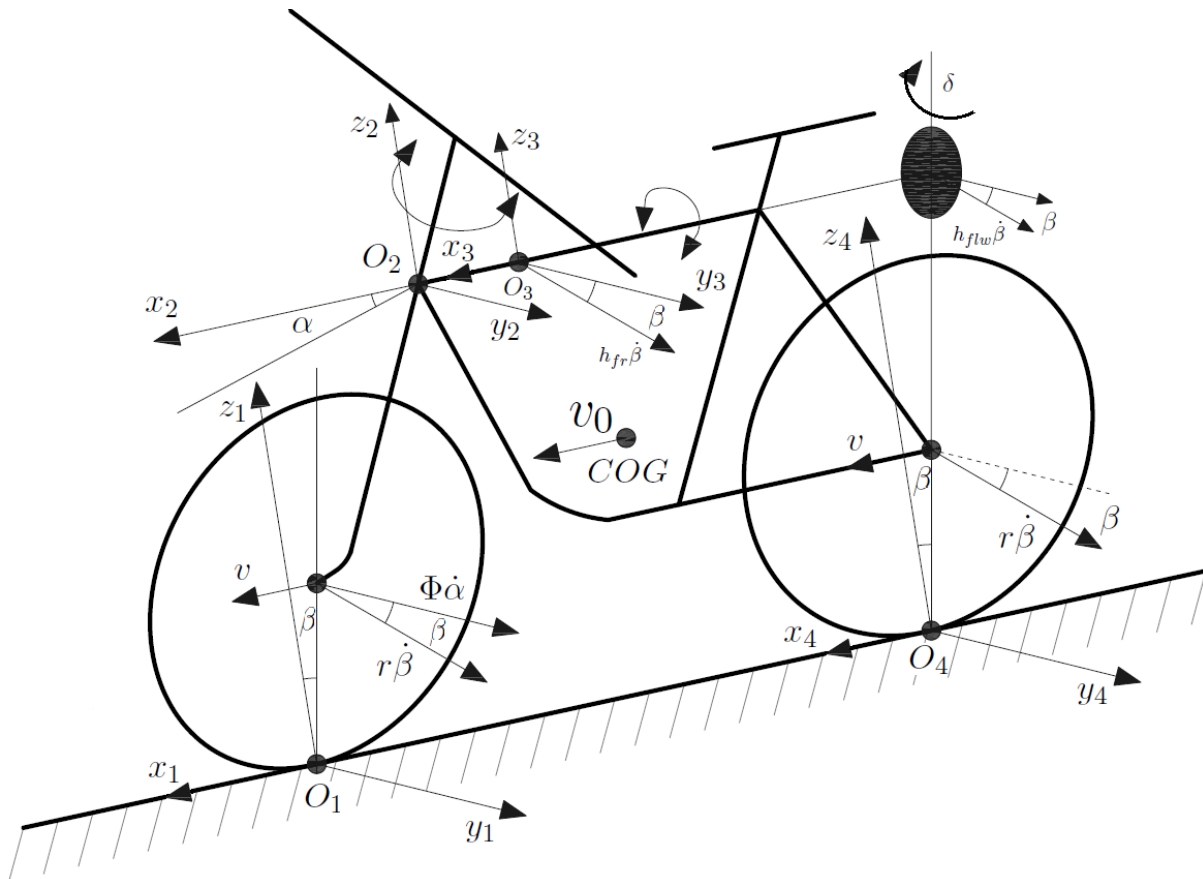
- ramy,
- przedniego koła,
- tylnego koła,
- koła zamachowego.

Do wyznaczenia równań dynamiki została użyta metoda Eulera-Lagrange'a, polega ona na wyznaczeniu funkcjonału Lagrange'a (tak zwanego lagrangianu). Ten funkcjonał jest różnicą całkowitej energii kinetycznej i potencjalnej w układzie (4.14):

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - P(q) \quad (4.14)$$

gdzie:

$$- q = \begin{bmatrix} \beta & \delta \end{bmatrix}^T - \text{jest wektorem uogólnionych położeń w układzie:}$$



Rys. 4.2. Schematyczny rysunek jednoślada z CMG wraz z zaznaczonymi układami współrzędnych. Rysunek opracowany na podstawie [47].

- β - kąt wychylenia ramy roweru od pionu,
- δ - kąt wychylenia koła zamachowego,
- $K(q, \dot{q})$ - jest funkcją prezentującą sumę energii kinetycznych w układzie,
- $P(q)$ - jest funkcją przedstawiającą sumę energii potencjalnych w układzie.

$$\frac{d}{dt} [\nabla_{\dot{q}} L] - \nabla_q L = \tau \quad (4.15)$$

gdzie:

- $\nabla_x F$ - oznaczenie na wektor pochodnych cząstkowych funkcji F względem zmiennej x ,
- τ - wektor zewnętrznych sił i momentów sił przyłożonych do układu.

Dla każdego z wymienionych elementów wyznaczono równania opisujące jego energię kinetyczną i potencjalną.

4.6.1. Energia potencjalna

Dla każdego z wcześniej wymienionych elementów wyznaczono energię potencjalną.

Rama roweru –

$$P_{fr} = gm_{fr}h_{fr} \cos \beta \quad (4.16)$$

Przednie koło –

$$P_{fw} = gm_w r \cos \beta \quad (4.17)$$

Tylne koło –

$$P_{rw} = gm_w r \cos \beta \quad (4.18)$$

Koło zamachowe –

$$P_{flw} = gm_{flw}h_{flw} \cos \beta \quad (4.19)$$

4.6.2. Energia kinetyczna

Energia kinetyczna dla każdego elementu została wyznaczona jako suma energii ruchu postępowego jednoślada i ruchu obrotowego odchylenia od pionu. Suma energii dla każdego elementu została przedstawiona poniżej:

Rama roweru –

$$K_{fr} = \frac{1}{2}(m_{fr}v_{fr}^2 + J_4\dot{\beta}^2) \quad (4.20)$$

gdzie:

$v_{fr}^2 = v^2 + (h_{fr}\dot{\beta})^2 + \lambda h_{fr}p_{fr}\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta$ - prędkość postępową środka grawitacji roweru, gdzie:

$h_{fr}\dot{\beta}$ - pochodzi od prędkości wychylania ramy,

$\lambda h_{fr}p_{fr}\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta$ - jest zależna od ruchu kierownicą,

$-J_4\dot{\beta}^2$ - pochodzi od prędkości odchylenia od pionu.

Przednie koło –

$$K_{fw} = \frac{1}{2}(m_w v_{fw}^2 + J_1\dot{\alpha}^2 + J_2\dot{\beta}^2 + J_3\left(\frac{v}{r}\right)^2) \quad (4.21)$$

gdzie:

$-v_{fw}^2 = v^2 + (\Phi\ddot{\alpha})^2 + (r\dot{\beta})^2 + 2\Phi r\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta$ - prędkość postępową przedniego koła,

$-J_1\dot{\alpha}^2$ - składowa pochodząca od ruchu kierownicą,

$-J_2\dot{\beta}^2$ - składowa pochodząca od prędkości wychylania od pionu,

$-J_3\left(\frac{v}{r}\right)^2$ - składowa pochodząca od ruchu postępowego.

Tylne koło –

$$K_{rw} = \frac{1}{2}(m_2 v_{rw}^2 + J_2 \dot{\beta}^2 + J_3 \left(\frac{v}{r}\right)^2) \quad (4.22)$$

gdzie:

- $v_{rw}^2 = v^2 + (r\dot{\beta})^2$ - prędkość postępową tylnego koła,
- $J_2 \dot{\beta}^2$ - składowa pochodząca od prędkości wychylania od pionu,
- $J_3 \left(\frac{v}{r}\right)^2$ - składowa pochodząca od ruchu postępowego.

Koło zamachowe –

$$K_{fw} = \frac{1}{2}(m_{flw} v_{flw}^2 + J_p[\omega^2 + (\dot{\beta} \sin \delta)^2] + J_r[\dot{\delta}^2 + (\dot{\beta} \cos \delta)^2]) \quad (4.23)$$

gdzie:

- $v_{flw}^2 = v^2 + (h_{flw}\dot{\beta})^2 + (\lambda p_{flw}\dot{\alpha})^2 + 2h_{flw}\lambda p_{flw}\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta$ - prędkość postępową koła zamachowego,
- $J_p[\omega^2 + (\dot{\beta} \sin \delta)^2]$ - składowa pochodząca od obrotu wokół głównej osi obrotu,
- $J_r[\dot{\delta}^2 + (\dot{\beta} \cos \delta)^2]$ - składowa pochodząca od prędkości precesji.

4.6.3. Równanie Eulera-Lagrange'a

Po podstawieniu równań od (4.16) do (4.23) i wykonaniu różniczkowania (4.15) otrzymuje się równania dynamiki w postaci (4.24):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G} \sin \beta + 2(J_p - J_r) \sin \beta \cos \beta \dot{\beta} \dot{\delta} - \mathbf{H} \cos \beta \ddot{\alpha} - \mathbf{J}(\beta, \delta) \ddot{\beta} = \mathbf{P}_1 \\ (J_p - J_r) \cos \delta \sin \delta \dot{\beta}^2 + J_r \ddot{\delta} = \mathbf{P}_2 \end{array} \right\} \quad (4.24)$$

gdzie:

- $\mathbf{G} = g(h_{fr} m_{fr} + h_{flw} m_{flw} + 2m_w r)$,
- $\mathbf{H} = \Phi(h_{fr} m_{fr} p + h_{flw} m_{flw} p_{flw} + m_w r)$,
- $\mathbf{J}(\beta, \delta) = 2J_2 + J_4 + h_{fr}^2 m_{fr} + 2r^2 m_w + h_{flw}^2 m_{flw} + J_p \cos^2 \beta + J_r \sin^2 \delta$,
- $\mathbf{P}_1 = J_p \omega \dot{\delta} \cos \delta + (m_{flw} + m_{fr}) h a_r(\alpha)$:
 - człon $J_p \omega \dot{\delta} \cos \delta$ jest pierwszym elementem wektora momentów generowanych przez **CMG**, równanie (3.17),
 - człon $(m_{flw} + m_{fr}) h a_r(\alpha)$ pochodzi od siły odśrodkowej - równanie (4.13),
- $\mathbf{P}_2 = T_m - J_p \omega \dot{\beta} \cos \delta - B_m \dot{\delta}$:
 - T_m jest momentem siły, który obraca kołem zamachowym,

- $B_m \dot{\delta}$ pochodzi od oporów ruchu w łożysku,
- $-J_p \omega \dot{\beta} \cos \delta$ jest trzecim elementem z wektora momentów generowanych przez **CMG** - równanie (3.17).

Równania (4.24) można również przedstawić w postaci (4.25):

$$\mathbf{D}(q)\ddot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \mathbf{g}(q) = \tau \quad (4.25)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} - \mathbf{D}(q) &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\beta, \delta) & 0 \\ 0 & J_r \end{bmatrix}, \\ - \mathbf{C}(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} 0 & 2(J_p - J_r) \sin \beta \cos \beta \dot{\beta} \\ 2(J_p - J_r) \sin \delta \cos \delta \dot{\beta} & 0 \end{bmatrix}, \\ - \mathbf{g}(q) &= \begin{bmatrix} \mathbf{G} \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4.7. Model pełny

Po przekształceniu równań (4.24) otrzymuje się system dynamiczny czwartego rzędu. W tym rozdziale przedstawiono dwa podejścia do opisu układu:

- wykorzystujące równania wyprowadzone z metody Eulera-Lagrange'a bez żadnych modyfikacji - sterowaniem jest moment przyłożony do koła zamachowego,
- model, w którym wprowadzono dynamikę członu wykonawczego (silnika prądu stałego), wówczas sygnałem sterującym jest napięcie przyłożone do silnika (ściślej rzecz biorąc, w praktyce byłby to współczynnik wypełnienia sygnału **PWM**).

4.7.1. Sterowanie momentem

Stan opisywany jest przez: wychylenie od pionu, prędkość wychylania od pionu, kąt precesji **CMG**, prędkość precesji **CMG**, natomiast sterowaniem jest moment obrotowy przyłożony do koła zamachowego.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \dot{\beta} \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix}, \quad u = T_m. \quad (4.26)$$

4.7.1.1. Model nieliniowy

Model nieliniowy uzyskano po prostych przekształceniach równań otrzymanych wprost z metody Eulera-Lagrange'a (4.24). Został on przedstawiony w równaniach (4.27).

$$\left. \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{\mathbf{J}(x_1, x_3)} (\mathbf{G} \sin x_1 + 2(J_p - J_r) \sin x_1 \cos x_1 x_2 x_4 \\ \quad - \mathbf{H} \cos x_1 \ddot{\alpha} - J_p \omega x_4 \cos x_3 - (m_{flw} + m - fr) a_r(\alpha)) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{J_r} (u - J_p \omega x_2 \cos x_3 - B_m x_4 - (J_p - J_r) x_2^2 \cos x_3 \sin x_3) \end{cases} \right\}. \quad (4.27)$$

Punktem równowagi powyższego układu jest punkt:

$$x^{eq} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ gdzie } k \in Z, \quad u^{eq} = 0. \quad (4.28)$$

Jednak z praktycznego punktu widzenia istotna jest tylko pozycja pionowa górna $x^{eq} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Sterowalność

Dla tak zdefiniowanego modelu można sprawdzić jego sterowalność, zgodnie z twierdzeniem (4.1). Ponieważ zmienność $\mathbf{J}(x_1, x_3)$ jest niewielka (rzędu około 2%) i jej wartość nie zmienia znaku, można założyć, że jest to wartość stała J . Wówczas macierz sterowalności $\mathbf{Q}_{torque}(x)$ upraszcza się i jest zdefiniowana równaniem (4.2), przybiera postać (4.29):

$$\mathbf{Q}_{torque}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & q_{13}(x) & q_{14}(x) \\ 0 & q_{22}(x) & q_{23}(x) & q_{24}(x) \\ 0 & q_{32}(x) & q_{33}(x) & q_{34}(x) \\ q_{41}(x) & q_{42}(x) & q_{43}(x) & q_{44}(x) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

gdzie:

- $q_{41}(x) = \frac{1}{J_r}$,
- $q_{22}(x) = \frac{1}{J J_r} [2x_2 \cos(x_1) \sin x_1 J_r + J_p \omega \cos x_4 - 2J_p x_2 \cos x_1 \sin x_1] - J_p \omega x_4 \sin x_4$,
- $q_{32}(x) = -\frac{1}{J_r}$,
- $q_{42}(x) = -\frac{B_m}{J_r^2}$,
- $q_{13}(x) = \frac{1}{J J_r} [2J_p x_2 \cos x_1 \sin x_1 - J_p \omega \cos x_4 - 2x_2 \cos x_1 \sin x_1 J_r + J_p \omega x_4 \sin x_4]$,
- $q_{23}(x) = q_{23}^{torque}(x)$,

$$\begin{aligned}
- q_{33}(x) &= -\frac{B_m}{J_r^2}, \\
- q_{43}(x) &= q_{43}^{torque}(x), \\
- q_{14}(x) &= q_{14}^{torque}(x), \\
- q_{24}(x) &= q_{24}^{torque}(x), \\
- q_{34}(x) &= q_{34}^{torque}(x), \\
- q_{44}(x) &= q_{44}^{torque}(x).
\end{aligned}$$

Dokładne wzory na rozwinięcie funkcji $q_{23}^{torque}(x)$, $q_{43}^{torque}(x)$, $q_{14}^{torque}(x)$, $q_{24}^{torque}(x)$, $q_{34}^{torque}(x)$ i $q_{44}^{torque}(x)$ przedstawiono w dodatku A.

4.7.1.2. Model liniowy

Model liniowy został uzyskany przez linearyzację metodą Taylora równań (4.27) wokół pożądanego punktu pracy x^{eq} i zerowego sterowania:

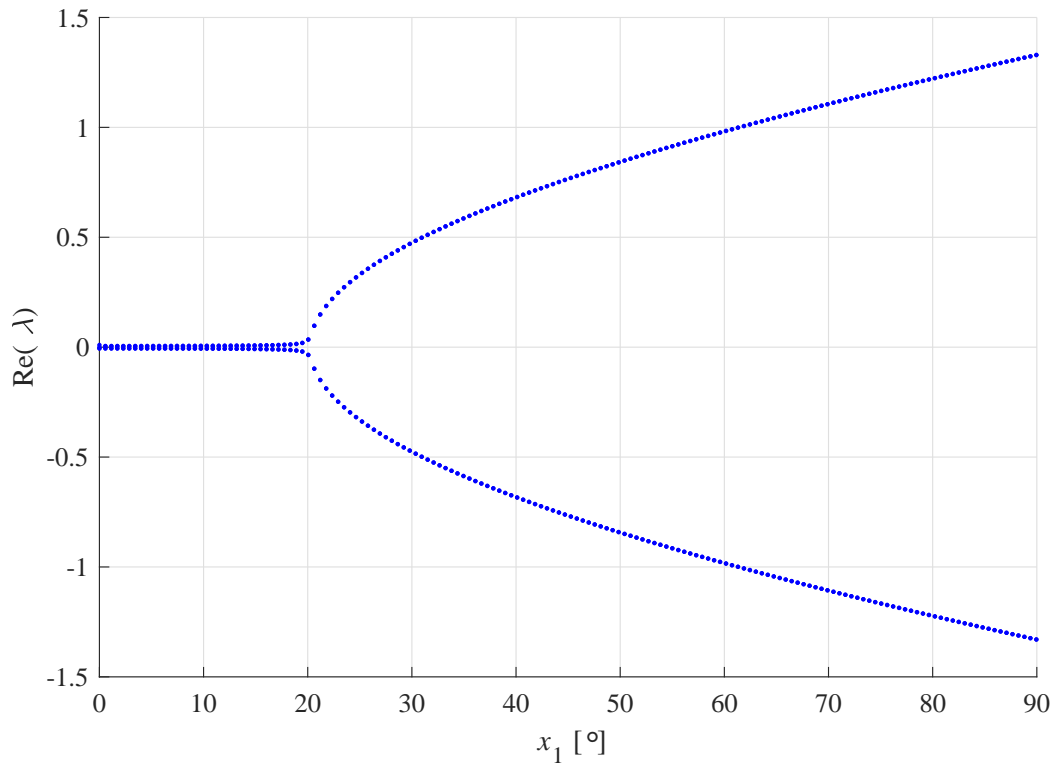
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} & 0 & 0 & \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{J_p \omega}{J_r} & 0 & -\frac{B_m}{J_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_r} \end{bmatrix} u. \quad (4.30)$$

Stabilność

W ramach analizy dynamiki rozważanego układu wykonano badanie jego wartości własnych w funkcji kąta wychylenia od pionu. Rozkład wartości własnych w funkcji x_1 przedstawiono na wykresie 4.3. Można zauważyć, że w okolicy punktu równowagi x^{eq} występują bardzo niewielkie zmiany (w zakresie ± 15 stopni od pionu). Na tej podstawie można wnioskować, iż w takim zakresie powinno być możliwe zastosowanie liniowego przybliżenia do projektowania regulatora.

Poza wspomnianą analizą sterowalności i wartości własnych przeprowadzono analizę, sprawdzającą jak zmienia się dynamika układu zlinearyzowanego w pętli sprzężenia zwrotnego, z zastosowanym regulatorem liniowym LQ w zależności od wychylenia koła zamachowego. Wyniki przedstawiono na rysunku 4.4.

Na podstawie analizy wyników (zobacz rysunek 4.4) można zauważyć, że wraz ze wzrostem wychylenia koła zamachowego największa wartość własna zbliża się do zera, tym samym pogarsza się jakość zdolności stabilizacji.



Rys. 4.3. Zmienność wartości własnych dla różnych wychyleń jednośladu od pionu x_1 dla modelu sterowanego momentem.

Sterowalność

Sterowalność układu liniowego można zbadać weryfikując rząd macierzy sterowalności (4.31) zdefiniowanej zgodnie z (4.4):

$$\mathbf{Q}_{torque}^L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & q_{13}^L & q_{14}^L \\ 0 & q_{22}^L & q_{23}^L & q_{24}^L \\ 0 & q_{32}^L & q_{33}^L & q_{34}^L \\ q_{41}^L & q_{42}^L & q_{43}^L & q_{44}^L \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

gdzie:

$$- q_{41}^L = \frac{1}{J_r},$$

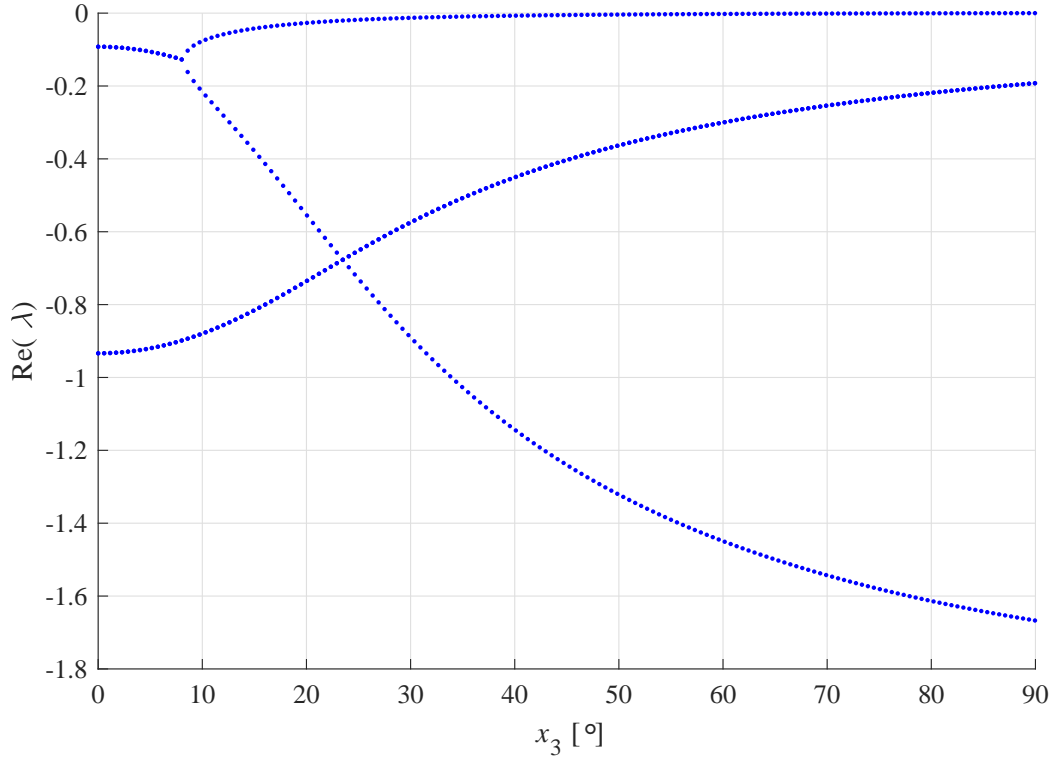
$$- q_{22}^L = \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})},$$

$$- q_{32}^L = \frac{1}{J_r},$$

$$- q_{42}^L = -\frac{B_m}{J_r^2},$$

$$- q_{13}^L = \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})},$$

$$- q_{23}^L = \frac{J_p \omega B_m}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq}) J_r},$$



Rys. 4.4. Zmienność wartości własnych dla różnych wychyleń koła zamachowego x_3 dla modelu sterowanego momentem przy regulacji LQ.

$$\begin{aligned}
 - q_{33}^L &= -\frac{B_m}{J_r^2}, \\
 - q_{43}^L &= -\frac{J_p \omega}{J_r} \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} + \frac{B_m^2}{J_r^3}, \\
 - q_{14}^L &= -\frac{J_p \omega}{J_r} \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} \frac{1}{J_r}, \\
 - q_{24}^L &= \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} \left(\frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} - \frac{J_p \omega}{J_r} \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} + \frac{B_m^2}{J_r^3} \right), \\
 - q_{34}^L &= -\frac{J_p \omega}{J_r} \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} + \frac{B_m^2}{J_r^3}, \\
 - q_{44}^L &= -\frac{B_m}{J_r} \left(\frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} \frac{J_r + 1}{J_r} + \frac{B_m^2}{J_r^3} \right).
 \end{aligned}$$

Macierz jest pełnego rzędu, zatem układ zlinearyzowany jest sterowalny.

Obserwowalność

Do analizy obserwowalności założono funkcję obserwacji w postaci:

$$y = Cx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Dla tak zdefiniowanej macierzy obserwacji i macierzy A w postaci (4.51), macierz obserwowalności ma postać (4.33):

$$\mathbf{M}_{torque} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ m_{41} & 0 & 0 & m_{54} \\ 0 & 0 & 0 & m_{64} \\ 0 & m_{72} & 0 & m_{74} \\ 0 & m_{82} & 0 & m_{84} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} - m_{41} &= \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})}, \\ - m_{54} &= \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})}, \\ - m_{64} &= -\frac{B_m}{J_r}, \\ - m_{72} &= \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} - \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} \frac{J_p \omega}{J_r}, \\ - m_{74} &= -\frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} \frac{B_m}{J_r}, \\ - m_{82} &= -\frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} \frac{J_p \omega}{J_r}, \\ - m_{84} &= \frac{B_m^2}{J_r^2}. \end{aligned}$$

Macierz obserwowalności (4.33) jest macierzą 4-tego rzędu dla dowolnego doboru parametrów, zatem system jest obserwowalny w sąsiedztwie punktu równowagi.

4.7.1.3. Transmitancja

Ponieważ pożądanym punktem pracy układu jest punkt równowagi x^{eq} , można zastosować transmitancję operatorową.

$$G_{torque}(s) = \begin{bmatrix} G_{torque}^{x_1 u}(s) \\ G_{torque}^{x_2 u}(s) \\ G_{torque}^{x_3 u}(s) \\ G_{torque}^{x_4 u}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1^1 s}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \\ \frac{b_2^2 s^2}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \\ \frac{b_3^3 s^2 + b_0^3}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \\ \frac{b_3^4 s^3 + b_1^4 s}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
- b_1^1 &= \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq}) J_r}, \\
- b_2^2 &= \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq}) J_r}, \\
- b_2^3 &= \frac{1}{J_r}, \\
- b_0^3 &= -\frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq}) J_r}, \\
- b_3^4 &= \frac{1}{J_r}, \\
- b_1^4 &= -\frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq}) J_r}, \\
- a_4 &= 1, \\
- a_3 &= -\frac{B_m}{J_r}, \\
- a_2 &= -\left(\frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} + \frac{J_p B_m \omega}{J_r^2}\right), \\
- a_1 &= -\frac{\mathbf{G} B_m}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq}) J_r}, \\
- a_0 &= 0.
\end{aligned}$$

Z przedstawionych transmitancji łatwo można zauważyć, iż układ jest niestabilny i nieminimalnofazowy.

Na rysunku 4.5 zaprezentowano charakterystyki Bodego dla transmitancji (4.34).

4.7.2. Sterowanie napięciem

Model opisany w rozdziale 4.7.1, można rozbudować o dynamikę członu wykonawczego, takie podejście do realizacji układu sterowania zostało przedstawione w pracy [73]. Elementem wykonawczym jest tam silnik prądu stałego, którego działanie można opisać modelem (4.35).

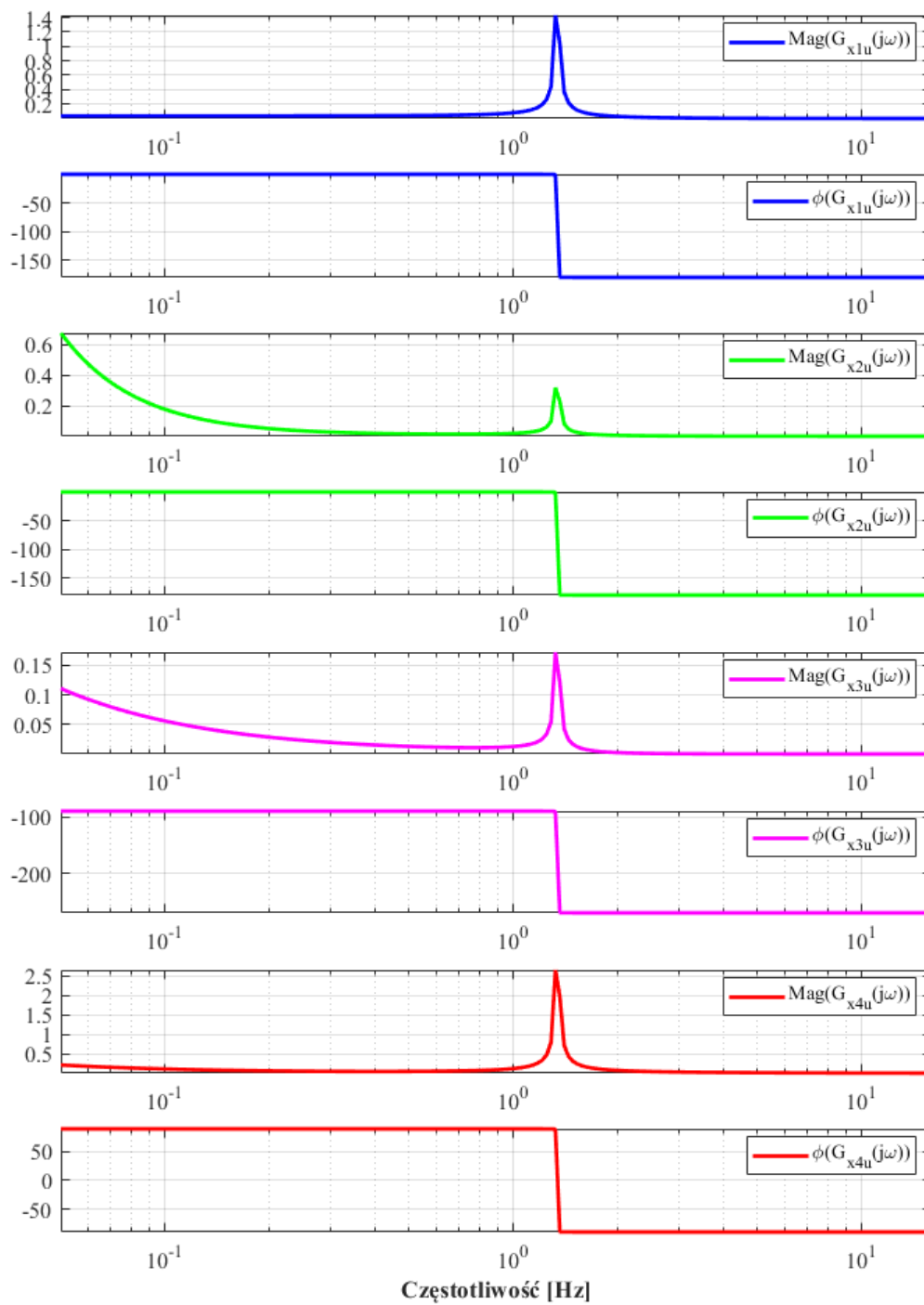
$$\left\{ \begin{array}{l} T_m(t) = K_m i(t) \\ U(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + K_c \dot{\delta}(t) \end{array} \right\} \quad (4.35)$$

gdzie:

- U - napięcie zasilające silnik,
- i - prąd w uzwojeniach wirnika,
- L - indukcyjność zastępcza uzwojeń wirnika,
- K_m - stała mechaniczna silnika,
- K_c - stała elektryczna silnika,
- R - rezystancja zastępcza uzwojeń silnika.

Do drugiego równania z (4.24) można zastąpić T_m .

$$\ddot{\delta} J_r + J_p \omega \dot{\beta} \cos \delta - (J_p - J_r) \dot{\beta}^2 \sin \delta \cos \delta + B_m \dot{\delta} = K_m i. \quad (4.36)$$



Rys. 4.5. Charakterystyka Bodego dla układu pełnego rzędu.

4.7.2.1. Model nieliniowy

Dla tak zmodyfikowanego opisu można ustalić stan obiektu jako:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \dot{\beta} \\ \delta \\ i \end{bmatrix}, \quad u = U. \quad (4.37)$$

Równania stanu przyjmują wówczas postać (4.38).

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{\mathbf{J}}(\mathbf{G} \sin x_1 + 2(J_p - J_r) \sin x_1 \cos x_1 x_2 x_4 \\ \quad - \mathbf{H} \cos x_1 \ddot{\alpha} - J_p \omega x_4 \cos x_3 - (m_{flw} + m_{fr}) a_r(\alpha)) \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{J_r}(K_m x_4 - J_p \omega x_2 \cos x_3 - B_m x_4 \\ \quad - (J_p - J_r) x_2^2 \cos x_3 \sin x_3) \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{L}(u - R x_4 - K_e x_3) \end{array} \right\}. \quad (4.38)$$

Punktem równowagi powyższego układu w przypadku gdy $K_m \neq B_m$ jest:

$$x^{eq} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{gdzie } k \in Z, \quad u^{eq} = 0. \quad (4.39)$$

Jednak z praktycznego punktu widzenia, istotna jest tylko pozycja pionowa górna $x^{eq} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Gdy spełniony jest warunek $K_m = B_m$, wówczas punkt równowagi ma postać:

$$x^{eq} = \begin{bmatrix} \arcsin\left(\frac{J_p \omega K_e}{G R} p \cos p\right) \\ 0 \\ p \\ -\frac{K_e}{R} p \end{bmatrix} \quad \text{gdzie } p \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad u^{eq} = 0. \quad (4.40)$$

Sterowalność

Dla modelu zdefiniowanego równaniami (4.38), można sprawdzić sterowalność zgodnie z twierdzeniem 4.1. Tak jak w poprzednim przypadku zmienność $\mathbf{J}(x_1, x_3)$ jest niewielka i ta wartość nie zmienia znaku, można założyć, że jest wartością stałą J .

$$\mathbf{Q}_{voltage}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & q_{13}(x) & q_{14}(x) \\ 0 & q_{22}(x) & q_{23}(x) & q_{24}(x) \\ 0 & q_{23}(x) & q_{33}(x) & q_{34}(x) \\ q_{41}(x) & q_{24}(x) & q_{43}(x) & q_{44}(x) \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
- q_{41}(x) &= \frac{1}{L}, \\
- q_{22}(x) &= \frac{1}{JL} [J_p \omega \cos x_3 - 2(J_p - J_r)x_2 \cos x_1 \sin x_1], \\
- q_{32}(x) &= \frac{1}{J_r L} [B_m - K_m], \\
- q_{42}(x) &= \frac{R}{L^2}, \\
- q_{13}(x) &= \frac{1}{JL} [2(J_p - J_r)x_2 \cos x_1 \sin x_1 - J_p \omega \cos x_3], \\
- q_{23}(x) &= q_{23}^{voltage}(x), \\
- q_{33}(x) &= q_{33}^{voltage}(x), \\
- q_{43}(x) &= \frac{1}{J_r L^2} \left[\frac{R^2 J_r}{L} K_e (B_m - K_m) \right], \\
- q_{14}(x) &= q_{14}^{voltage}(x), \\
- q_{24}(x) &= q_{24}^{voltage}(x), \\
- q_{34}(x) &= q_{34}^{voltage}(x), \\
- q_{44}(x) &= q_{44}^{voltage}(x).
\end{aligned}$$

Dokładne wzory na rozwinięcie funkcji $q_{23}^{voltage}(x)$, $q_{33}^{voltage}(x)$, $q_{14}^{voltage}(x)$, $q_{24}^{voltage}(x)$, $q_{34}^{voltage}(x)$ i $q_{44}^{voltage}(x)$ przedstawiono w dodatku B.

4.7.2.2. Model liniowy

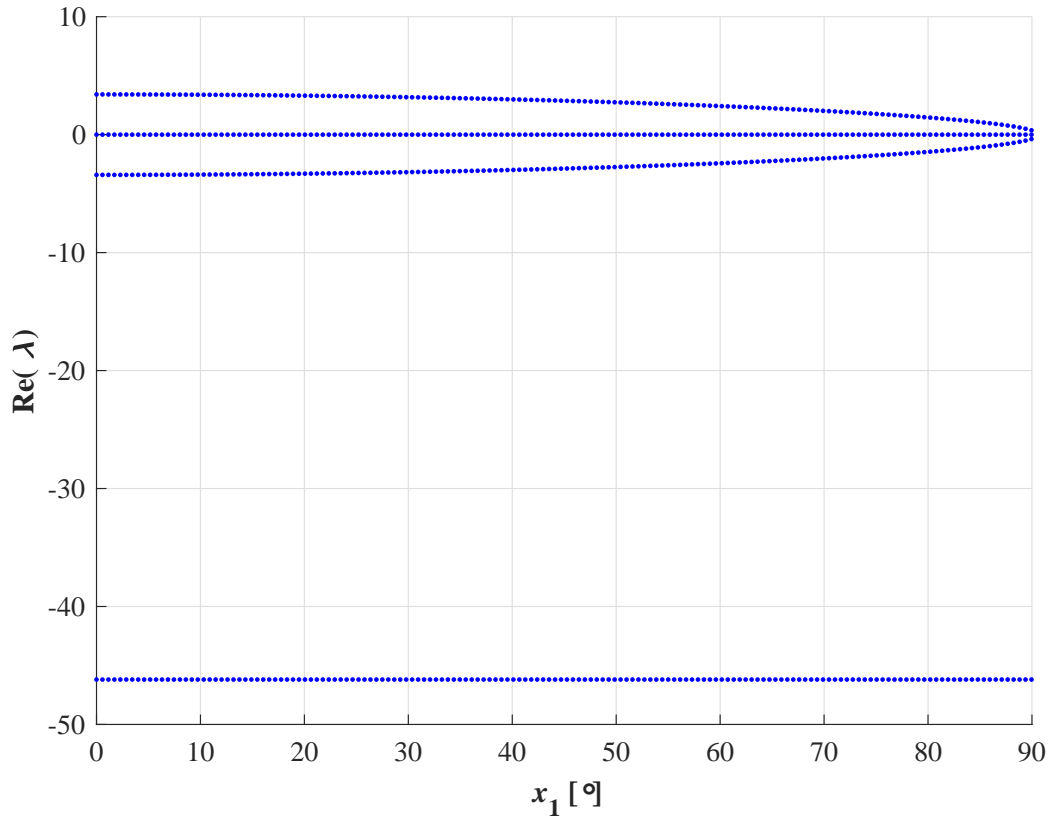
Model liniowy został uzyskany przez linearyzację metodą Taylora równań (4.38) wokół pożądanego punktu pracy, czyli punktu x^{eq} i zerowego sterowania:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} & 0 & 0 & \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} \\ 0 & -\frac{J_p \omega}{J_r} & -\frac{B_m}{J_r} & \frac{K_m}{J_r} \\ 0 & 0 & -\frac{J_p \omega}{J_r} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u. \quad (4.42)$$

Stabilność

W ramach analizy dynamiki układu z wykorzystaniem sterowania napięciowego wykonano badanie jego wartości własnych w zależności od kąta wychylenia od pionu. Zależność wartości własnych λ od x_1 przedstawiono na wykresie 4.6. Można zauważyć, że w pobliżu punktu pracy x^{eq} występują bardzo niewielkie zmiany (w zakresie około ± 15 stopni od pionu). Jest to podstawa, na której można wnioskować, iż w takim zakresie powinno być możliwe zastosowanie liniowego przybliżenia do projektowania regulatora.

Ponadto przeprowadzono analizę w zależności od wychylenia koła zamachowego, która sprawdza, jak zmienia się dynamika układu zlinearyzowanego w pętli sprzężenia zwrotnego - przy zastosowaniu



Rys. 4.6. Zmienność wartości własnych dla różnych wychyleń jednoślada od pionu x_1 dla modelu sterowanego napięciowo.

regulatora liniowo-kwadratowego. Wykres zmienności części rzeczywistych wartości własnych przedstawiono na rysunku 4.7.

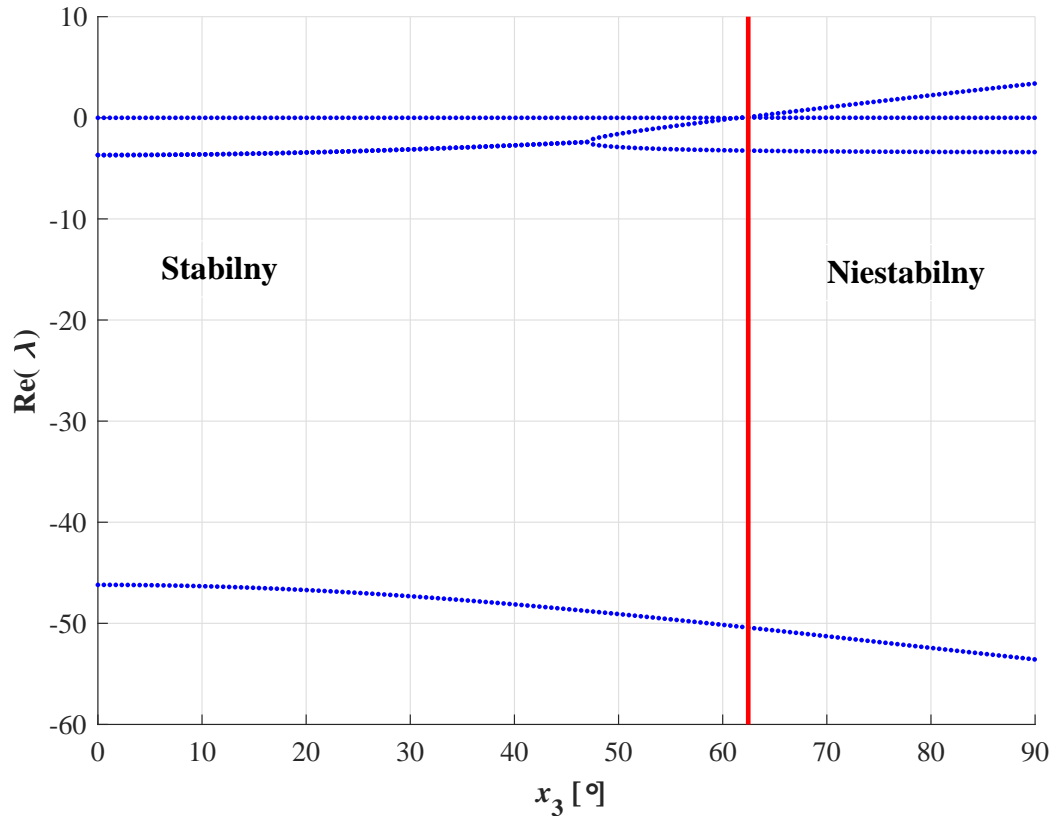
Z wyników ostatniej analizy można zauważyć, że przy zbyt dużym wychyleniu koła zamachowego, system traci stabilność. Dzieje się tak, dlatego że macierz B mocno zależy od obranego punktu pracy. Im większe jest jego wychylenie, tym mniejszy efekt sterujący jest odczuwalny. Jest tak, ponieważ drugi element macierzy B jest proporcjonalny do funkcji $\cos x_3$, można zatem wnioskować, że regulatory liniowe nie zapewnią stabilności w pożądanym zakresie. Dlatego koniecznym staje się zastosowanie nieliniowych algorytmów sterowania.

Sterowalność

Sterowalność układu liniowego można zbadać weryfikując rząd macierzy sterowalności (4.43):

$$\mathbf{Q}_{voltage}^L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & q_{13}^L & q_{14}^L \\ 0 & q_{22}^L & q_{23}^L & q_{24}^L \\ 0 & q_{32}^L & q_{33}^L & q_{34}^L \\ q_{41}^L & q_{42}^L & q_{43}^L & q_{44}^L \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

gdzie:



Rys. 4.7. Zmienność wartości własnych dla różnych wychyleń koła zamachowego x_3 dla modelu sterowanego napięciowo przy regulacji LQ. Czerwoną linią zaznaczono granicę, przy której układ się destabilizuje.

$$\begin{aligned}
 - q_{41}^L &= \frac{1}{L}, \\
 - q_{22}^L &= \frac{J_p \omega}{L \mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})}, \\
 - q_{32}^L &= \frac{K_m}{L J_r}, \\
 - q_{42}^L &= -\frac{R}{L^2}, \\
 - q_{13}^L &= \frac{J_p \omega}{L \mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})}, \\
 - q_{23}^L &= -\frac{R}{L} \frac{J_p \omega}{L \mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})}, \\
 - q_{33}^L &= -\frac{1}{L} \left(\frac{J_p \omega}{J_r} \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} + \frac{B_m K_m}{J_r J_r} + \frac{R K_m}{L J_r} \right), \\
 - q_{43}^L &= \frac{1}{L} \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{J_p \omega K_m}{J_r J_r} \right), \\
 - q_{14}^L &= \frac{J_p \omega}{L \mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})}, \\
 - q_{24}^L &= \frac{1}{L} \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} \left[\frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} + \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{J_p \omega K_m}{J_r J_r} \right) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- q_{34}^L &= \frac{1}{L} \left[\frac{J_p \omega}{J_r} \frac{R}{L} \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} - \frac{B_m}{J_r} \left(\frac{J_p \omega}{J_r} \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} + \frac{B_m}{J_r} \frac{K_m}{J_r} + \frac{R}{L} \frac{K_m}{J_r} \right) + \frac{K_m}{J_r} \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{J_p \omega}{J_r} \frac{K_m}{J_r} \right) \right], \\
- q_{44}^L &= -\frac{1}{L} \left[\frac{J_p \omega}{J_r} \left(\frac{J_p \omega}{J_r} \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} + \frac{B_m}{J_r} \frac{K_m}{J_r} + \frac{R}{L} \frac{K_m}{J_r} \right) + \frac{R}{L} \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{J_p \omega}{J_r} \frac{K_m}{J_r} \right) \right].
\end{aligned}$$

Macierz jest pełnego rzędu, zatem układ zlinearyzowany jest sterowalny.

Obserwowalność

Do analizy obserwowalności założono funkcję obserwacji w postaci:

$$y = Cx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Macierz obserwacji zdefiniowana zgodnie z (4.44) i macierz A w postaci (4.42) dają w rezultacie macierz obserwowalności w postaci (4.45):

$$\mathbf{M}_{voltage} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_{42} & m_{43} & m_{44} \\ m_{51} & 0 & 0 & m_{54} \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & m_{64} \\ 0 & m_{72} & m_{73} & m_{74} \\ m_{81} & m_{82} & m_{83} & m_{84} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
- m_{42} &= -\frac{J_p \omega}{J_r}, \\
- m_{43} &= -\frac{B_m}{J_r}, \\
- m_{44} &= \frac{K_m}{J_r}, \\
- m_{51} &= \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})}, \\
- m_{54} &= \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})}, \\
- m_{61} &= -\frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} \frac{J_p \omega}{J_r}, \\
- m_{62} &= \frac{J_p \omega}{J_r} \frac{B_m}{J_r}, \\
- m_{63} &= \frac{B_m^2}{J_r^2} - \frac{K_m}{J_r} \frac{J_p \omega}{J_r}, \\
- m_{64} &= -\frac{J_p \omega}{J_r} \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} + \frac{B_m}{J_r} \frac{J_p \omega}{J_r} - \frac{K_m}{J_r} \frac{R}{L}, \\
- m_{72} &= \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- m_{73} &= -\frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} \frac{J_p \omega}{J_r}, \\
- m_{74} &= -\frac{J_p \omega}{J_r} \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})}, \\
- m_{81} &= \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} \frac{J_p \omega}{J_r} \frac{B_m}{J_r}, \\
- m_{82} &= -\frac{J_p \omega}{J_r} \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} - \frac{J_p \omega}{J_r} \left(\frac{B_m^2}{J_r^2} - \frac{K_m}{J_r} \frac{J_p \omega}{J_r} \right), \\
- m_{83} &= -\frac{B_m}{J_r} \left(\frac{B_m^2}{J_r^2} - \frac{K_m}{J_r} \frac{J_p \omega}{J_r} \right) - \frac{J_p \omega}{J_r} \left(-\frac{J_p \omega}{J_r} \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} + \frac{B_m}{J_r} \frac{J_p \omega}{J_r} - \frac{K_m}{J_r} \frac{R}{L} \right), \\
- m_{84} &= \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} \frac{J_p \omega}{J_r} \frac{B_m}{J_r} + \frac{K_m}{J_r} \left(\frac{B_m^2}{J_r^2} - \frac{K_m}{J_r} \frac{J_p \omega}{J_r} \right) - \frac{R}{L} \left(-\frac{J_p \omega}{J_r} \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} + \frac{B_m}{J_r} \frac{J_p \omega}{J_r} - \frac{K_m}{J_r} \frac{R}{L} \right).
\end{aligned}$$

Macierz $M_4^{voltage}$ jest 4-tego rzędu ponieważ elementy m_{44} , m_{54} i m_{74} zawsze (dla sensownych fizycznie parametrów) są różne od 0, zatem układ jest obserwowalny.

4.7.2.3. Transmitancja

Ponieważ pożądanym punktem pracy układu jest punkt równowagi x^{eq} , można zastosować transmitancję operatorową.

$$G_{voltage}(s) = \begin{bmatrix} G_{voltage}^{x_1 u}(s) \\ G_{voltage}^{x_2 u}(s) \\ G_{voltage}^{x_3 u}(s) \\ G_{voltage}^{x_4 u}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1^1 s + b_0^1}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \\ \frac{b_2^2 s^2 + b_1^2 s}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \\ \frac{b_2^3 s^2 + b_1^3 s + b_0^3}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \\ \frac{b_3^4 s^3 + b_2^4 s^2 + b_1^4 s + b_0^4}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
- b_1^1 &= \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq}) L}, \\
- b_0^1 &= \frac{J_p^2 \omega^2}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq}) J_r L}, \\
- b_2^2 &= \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq}) L}, \\
- b_1^2 &= \frac{J_p^2 \omega^2}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq}) J_r L}, \\
- b_2^3 &= \frac{K_m}{J_r L}, \\
- b_1^3 &= \frac{K_m J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq}) J_r L}, \\
- b_0^3 &= -\frac{K_m \mathbf{G}}{J_r \mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq}) L}, \\
- b_3^4 &= \frac{1}{L}, \\
- b_2^4 &= \frac{B_m}{J_r L},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- b_1^A &= -\frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})L}, \\
- b_0^A &= -\frac{\mathbf{G}K_m}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})J_r L}, \\
- a_4 &= 1, \\
- a_3 &= \left(\frac{B_m}{J_r} + \frac{R}{L}\right), \\
- a_2 &= -\left(\frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} - \frac{K_m J_p \omega}{J_r^2} - \frac{B_m R}{J_r L}\right), \\
- a_1 &= -\left(\frac{B_m}{J_r} + \frac{R}{L}\right)\left(\frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} - 1\right), \\
- a_0 &= -\frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})}\left(\frac{B_m R}{J_r L} + \frac{K_m J_p \omega}{J_r^2}\right).
\end{aligned}$$

Podobnie jak w przypadku modelu ze sterowaniem momentem, również w tym przypadku widać, że system nie jest stabilny i nieminimalnofazowy.

Na rysunku 4.8 przedstawiono charakterystykę Bodego dla układu ze sterowaniem napięciowym.

4.8. Model uproszczony

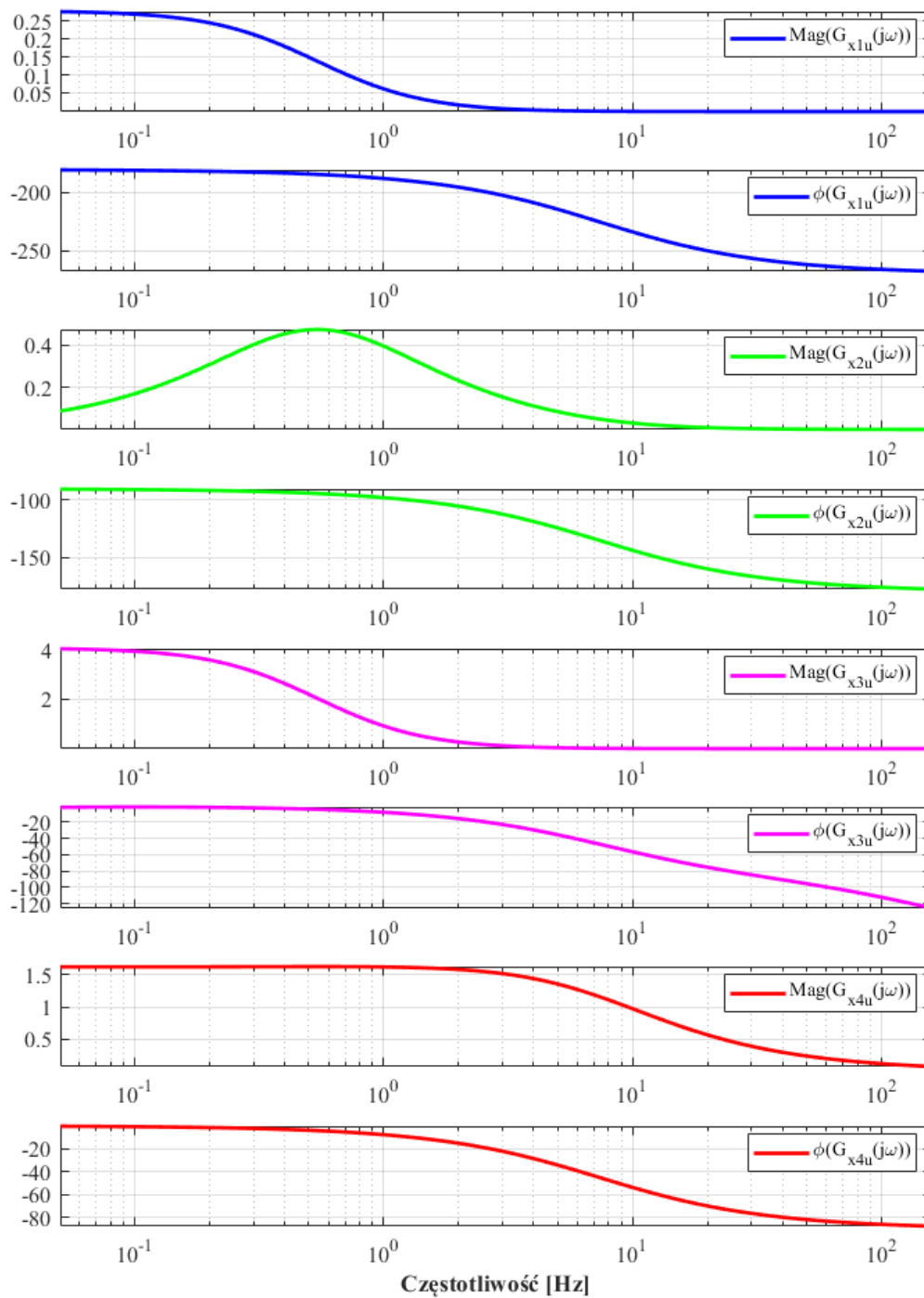
W celu uproszczenia zaprezentowanego modelu dynamiki można zaproponować pominięcie dynamiki członu wykonawczego, obracającego kołem zamachowym. Taki rezultat można osiągnąć stosując silnik krokowy o stałej czasowej pomijalnie małej w stosunku do czasu próbkowania. Ponadto, dzięki zastosowaniu odpowiedniego sterownika dla silnika krokowego, sterowanie momentem lub sterowanie napięciem można zastąpić sterowaniem wprost prędkością obrotową precesji koła zamachowego. Dzięki temu zabiegowi można zredukować ilość zmiennych stanu z 4 do 3. W tej konfiguracji stanu sterowanie definiuje (4.47).

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \dot{\beta} \\ \delta \end{bmatrix}, \quad u = \dot{\delta}. \quad (4.47)$$

4.8.0.1. Model nieliniowy

Model nieliniowy, w którym pominięto dynamikę członu wykonawczego zgodnie z podanymi założeniami opisuje układ równań (4.48):

$$\left. \begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{\mathbf{J}(x_1, x_3)} [\mathbf{G} \sin x_1 + 2(J_p - J_r) \sin x_3 \cos x_3 x_2 u - J_p \omega \cos x_3 u \\
&\quad + (m_{flw} + m_{fr}) a_r(\alpha)] \\
\dot{x}_3 &= u
\end{aligned} \right\}. \quad (4.48)$$



Rys. 4.8. Charakterystyka Bodego dla układu pełnego rzędu ze sterowaniem napięciem.

Punktem równowagi powyższego układu jest:

$$x^{eq} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ gdzie } k \in Z, u^{eq} = 0. \quad (4.49)$$

Jednak z praktycznego punktu widzenia istotna jest tylko pozycja pionowa górna $x^{eq} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Sterowalność

Dla modelu zredukowanego, opisanego równaniami (4.48), można zweryfikować sterowalność, zgodnie z twierdzeniem (4.1), również tym razem przyjęto uproszczenie na wartość $\mathbf{J}(x_1, x_3)$. W takiej sytuacji macierz sterowalności $\mathbf{Q}_{reduced}(x)$ przybiera postać (4.50):

$$\mathbf{Q}_{reduced}(x) = \begin{bmatrix} 0 & q_{12}(x) & q_{13}(x) \\ q_{21}(x) & q_{22}(x) & q_{23}(x) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

gdzie elementy macierzy są zdefiniowane jako:

- $q_{12}(x) = \frac{1}{J} [2(J_p - J_r)G \sin x_3 \cos x_3 x_2 + J_p \omega \cos x_3]$,
- $q_{13}(x) = -\frac{1}{J^2} 2(J_p - J_r)G \cos x_3 \sin x_3 \cos x_1$,
- $q_{21}(x) = \frac{1}{J} [2(J_p - J_r) \sin x_3 \cos x_3 x_2 + J_p \omega \cos x_3]$,
- $q_{22}(x) = \frac{1}{J^2} 2(J_p - J_r)G \sin x_3 \cos x_3 \cos x_1$,
- $q_{23}(x) = \frac{1}{J^2} G \cos x_1 [2(J_p - J_r) \sin x_3 \cos x_3 x_2 + J_p \omega \cos x_3]$.

Macierz jest rzędu 3. dla każdego $x_3 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, z czego wynika, iż układ jest sterowalny w tym przedziale przestrzeni stanu.

4.8.0.2. Model liniowy

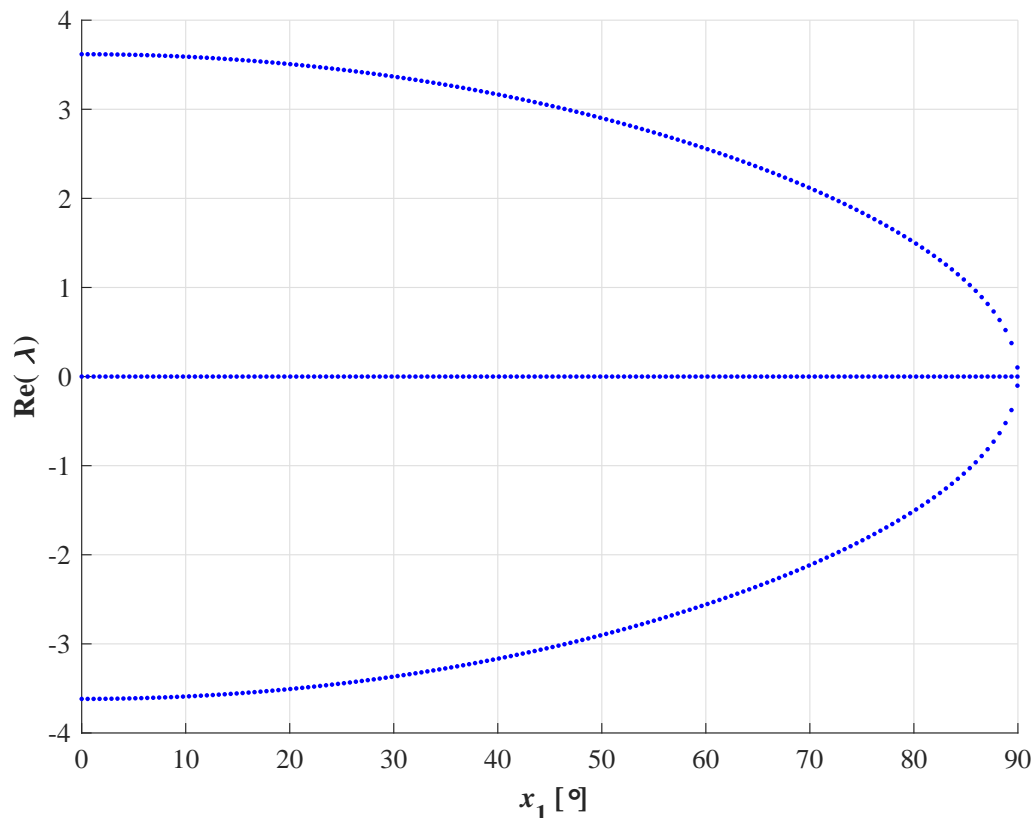
Model zlinearyzowany osiągnięto poprzez zastosowanie linearyzacji metodą Taylora równań (4.48) wokół punktu równowagi x^{eq} :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})} \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (4.51)$$

Stabilność

W celu badania dynamiki rozważanego układu zredukowanego wykonano badanie jego wartości własnych w zależności od kąta wychylenia ramy roweru od górnego punktu równowagi. Rozkład wartości własnych w zależności od x_1 przedstawiono na wykresie 4.9. Na podstawie jego analizy zauważyć

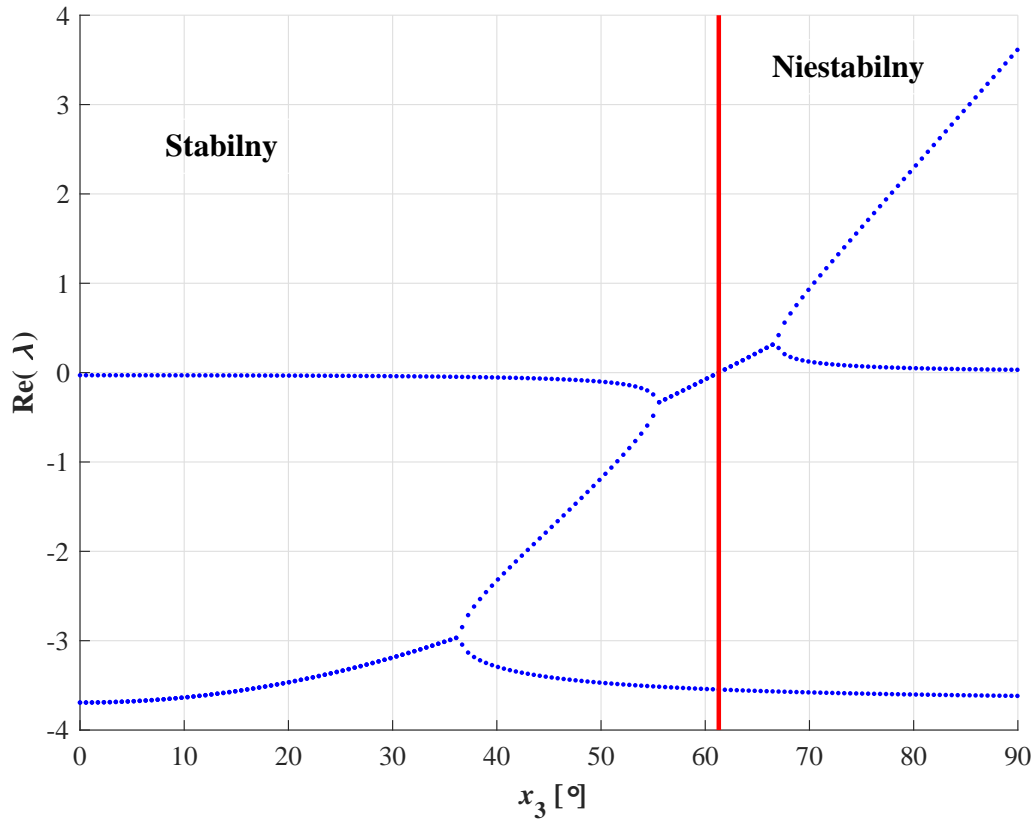
można, że w okolicy punktu równowagi x^{eq} występują bardzo niewielkie zmiany (w zakresie ± 10 stopni od pionu). Na tej podstawie można wnioskować, że w takim zakresie powinno być możliwe zastosowanie z powodzeniem liniowego przybliżenia do projektowania regulatora.



Rys. 4.9. Zmienność wartości własnych dla różnych wychyleń jednoślada od pionu x_1 dla modelu zredukowanego.

Poza wspomnianą analizą sterowalności i wartości własnych, przeprowadzono analizę w ramach której sprawdzono, jak zmienia się dynamika układu zlinearyzowanego w pętli sprzężenia zwrotnego z zastosowanym regulatorem liniowym LQ. Wyniki analiz przedstawiono na rysunku 4.10.

Z ostatniego wykresu wynika, że przy zbyt dużym wychyleniu koła zamachowego system traci stabilność. Dzieje się tak, gdyż macierz B mocno zależy od obranego punktu pracy. Im większe wychylenie, tym mniej efekt jest odczuwalny, ponieważ drugi element macierzy B jest proporcjonalny do cosinusa wychYLENIA koła zamachowego. Można zatem wnioskować, że regulatory liniowe nie zapewnią stabilności w pożądanym zakresie. Dlatego konieczne jest zastosowanie nieliniowych algorytmów sterowania.



Rys. 4.10. Zmienność wartości własnych dla różnych wychyleń koła zamachowego x_3 dla modelu zredukowanego przy regulacji LQ. Czerwoną linią zaznaczono granicę przy której układ się destabilizuje.

Sterowalność

Sterowalność układu liniowego można zbadać weryfikując rząd macierzy:

$$\mathbf{Q}_{reduced}^L = \begin{bmatrix} 0 & q_{12}^L & 0 \\ q_{21}^L & 0 & q_{23}^L \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} - q_{12}^L &= -\frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})}, \\ - q_{21}^L &= -\frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})}, \\ - q_{23}^L &= -\frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^0)} \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})}. \end{aligned}$$

Macierz jest pełnego rzędu, zatem liniowa aproksymacja rozważanego układu jest sterowalna.

Obserwowalność

Do analizy obserwowalności założono funkcję obserwacji w postaci:

$$y = Cx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$

Dla tak zdefiniowanej macierzy obserwacji i macierzy A w postaci (4.51), macierz obserwowalności ma postać (4.54):

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m_{51} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

gdzie $m_{51} = \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})}$.

Macierz jest rzędu 3, zatem model jest lokalnie obserwowalny w otoczeniu punktu równowagi.

4.8.0.3. Transmitancja

Ponieważ pożądanym punktem pracy układu jest punkt x^{eq} , można zastosować transmitancję operatorową:

$$G_{reduced}(s) = \begin{bmatrix} G_{reduced}^{x_1 u}(s) \\ G_{reduced}^{x_2 u}(s) \\ G_{reduced}^{x_3 u}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1^1 s}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \\ \frac{b_2^2 s^2}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \\ \frac{b_3^3 s^2 + b_0^3}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

gdzie:

$$- b_1^1 = \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})},$$

$$- b_2^2 = \frac{J_p \omega}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})},$$

$$- b_0^3 = \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})},$$

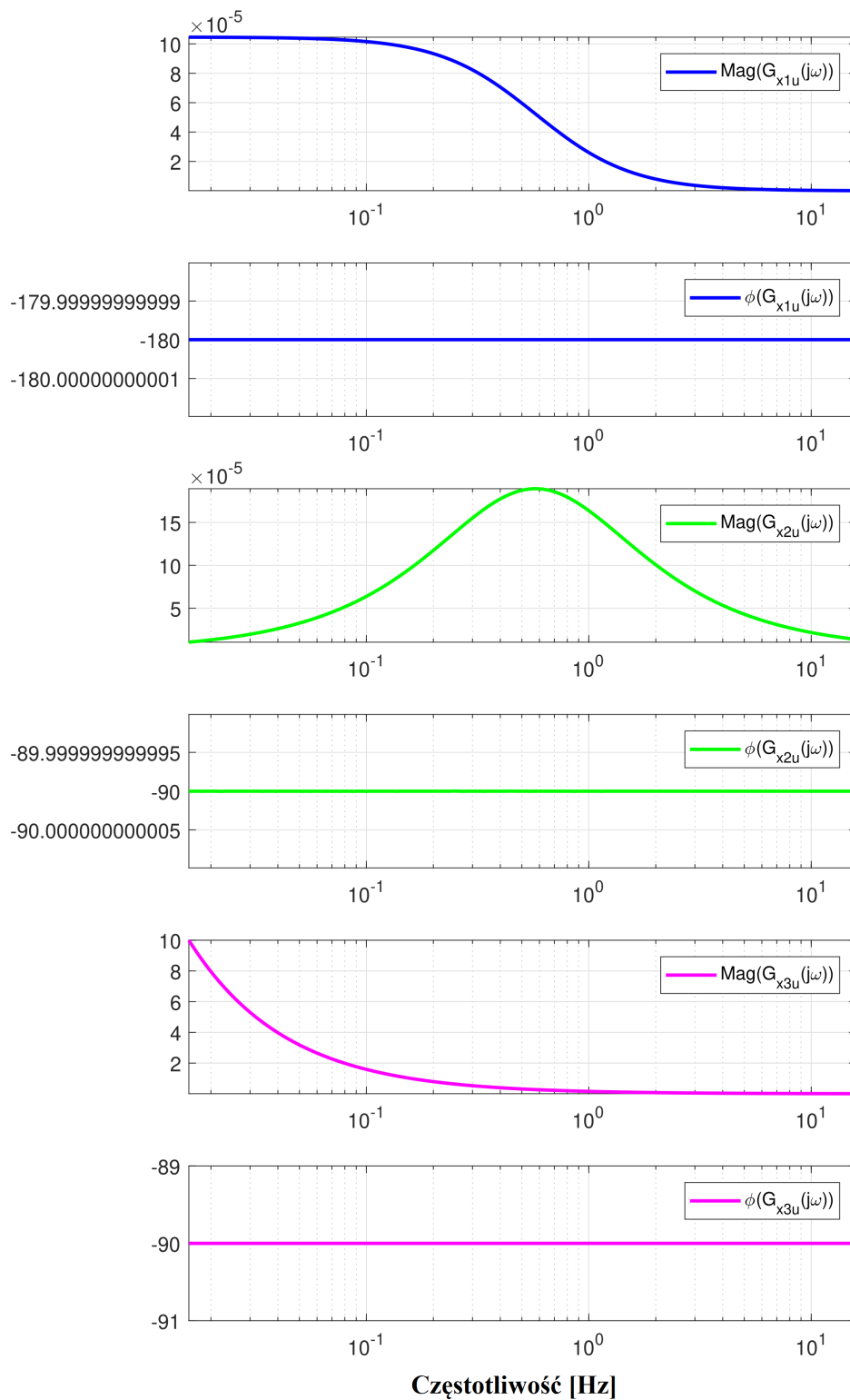
$$- b_2^3 = 1,$$

$$- a_3 = 1,$$

$$- a_2 = 0,$$

$$- a_1 = \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{J}(x_1^{eq}, x_3^{eq})},$$

$$- a_0 = 0.$$



Rys. 4.11. Charakterystyka Bodego modelu uproszczonego.

5. Algorytmy sterowania

W celu zagwarantowania stabilności dla różnych kierowców, algorytm sterowania musi posiadać odporność na zmiany parametrów zakładanego modelu obiektu. Można wyróżnić dwie główne metody rozwiązywania tego problemu:

- algorytmy sterowania odpornego (ang. *robust control*) - algorytmy projektowane w ten sposób zachowują stabilność dla zadanego zakresu zmiany parametrów i zakłóceń, podczas gdy same parametry regulatora nie ulegają zmianie,
- algorytmy sterowania adaptacyjnego (ang. *adaptive control*) - algorytmy polegające na swego rodzaju „ciągłej identyfikacji” obiektu i korekcji nastaw regulatora.

W niniejszym rozdziale przedstawiono kilka wybranych metod projektowania algorytmów sterowania. Część z nich to tak zwane „klasyczne” metody sterowania, nieuwzględniające w procesie projektowania żadnych niepewności. Pozostała część to regulatory odporne. Algorytmy sterowania adaptacyjnego nie będą omawiane.

Dla każdego z wybranych algorytmów przedstawiono wyniki symulacyjne dla opracowanego modelu matematycznego, zrealizowane w środowisku MATLAB/Simulink.

5.1. Zakłócenia

Modelowanie układów fizycznych na potrzebę systemów sterowania wymaga uchwycenia i opisanie głównych cech wpływających na zachowanie układu, które są jednocześnie dogodne do wygodnego opisu matematycznego. Bardzo dokładny opis matematyczny może być nieodpowiedni dla zastosowań praktycznych z powodu bardzo skomplikowanych technik analizy. Z drugiej strony, zbyt duże uproszczenie modelu, które gubi znaczącą część informacji, prowadzi do nieakceptowalnie dużych różnic w zachowaniu modelu i układu rzeczywistego, co pociąga za sobą pogorszoną jakość systemu sterowania.

Odnalezienie kompromisu pomiędzy uchwyceniem najważniejszych właściwości prawdziwego układu a utworzeniem modelu wygodnego dla dalszej analizy matematycznej wymaga dużego nakładu pracy od inżyniera sterowania. Standardową metodą uzyskania satysfakcjonujących rezultatów układu sterowania jest użycie uproszczonego modelu jako tzw. systemu nominalnego. Różnicę pomiędzy systemem nominalnym a systemem rzeczywistym reprezentuje się jako zaburzenie wartości parametrów. Jest ono nazywane modelem niepewności.

Zwykle wyróżnia się dwa podstawowe typy niepewności [35]:

- strukturalne,
- niestructuralne.

Zostaną one omówione w kolejnych podpunktach.

5.1.1. Strukturalne

Niepewności strukturalne są niepewnościami, które wynikają z niepełnej wiedzy o dynamice modelowanego/sterowanego obiektu. Zatem za zakłócenia strukturalne uznać można np. zbyt uproszczony model tarcia, itp. Zazwyczaj tego typu niepewności są uwzględniane w modelu jako dodane zakłócenie.

5.1.2. Niestructuralne

Niepewności niestructuralne są niepewnościami, które wynikają z braku dokładnej identyfikacji obiektu. Nawet przy założeniu pełnej wiedzy o fizyce obiektu i wiernym oddaniu jej w modelu, przy niedokładnej identyfikacji parametrów będą występowały niepewności niestructuralne.

Zwykle modeluje się je zakładając, że wybrane parametry modelu mogą przyjmować dowolną wartość z pewnego przedziału wartości. Mogą to być parametry równań stanu czy współczynniki transmissji operatorowej.

5.2. Algorytmy liniowe

5.2.1. Regulator PID

5.2.1.1. Teoria

Regulator PID jest regulatorem składającym się z trzech członów: proporcjonalnego, całkującego i różniczkującego. Stosowany jest w układach regulacji jednowymiarowych (ang. *single input, single output* - SISO). Najczęściej jego celem jest utrzymanie wartości wyjściowej $y(t)$ na określonym poziomie. Działa zatem na wejściu, którym jest odchyłka od wartości zadanej:

$$e(t) = y(t) - y_d(t). \quad (5.1)$$

Najogólniej, można wyróżnić postać ciągłą i dyskretną regulatora PID. Istnieją różne modyfikacje usprawniające działanie regulatora PID, na przykład tzw. *anti-windup*. Jednak ich omawianie nie znajduje się w zakresie tej pracy - ostatecznie zostanie użyta wersja PD regulatora, zatem nie będą tu występować problemy związane z całkowaniem.

Postać ciągła

Podstawowa postać regulatora PID przedstawia się następująco:

$$u(y(t)) = K_P y(t) + \frac{1}{K_I} \int_0^t y(\tau) dt + K_D \frac{dy(t)}{dt}. \quad (5.2)$$

W przypadku modelowania obiektu sterowania w postaci transmitancji operatorowej przybiera on formę:

$$u(s) = e(s)\left(K_P + \frac{1}{K_I s} + K_D s\right). \quad (5.3)$$

Ponieważ idealny człon różniczkujący nie jest realizowalny, można posłużyć się tzw. rzeczywistym regulatorem PID:

$$u(s) = e(s)\left(K_P + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{\frac{T_D}{D_D} s + 1}\right). \quad (5.4)$$

Postać dyskretna

W przypadku posługiwania się dyskretnymi równaniami stanu obiektu użyteczna jest postać:

$$u(k) = K_P^D y(k) + K_I^D T_s \sum_{i=0}^{i=k} y(i) + K_D^D \frac{y(k) - y(k-1)}{T_s}. \quad (5.5)$$

Gdy obiekt zamodelowany jest w postaci dyskretniej, wówczas można użyć postaci transmitancji:

$$u(z) = e(z)\left(K_P^D + \frac{K_I^D}{2} \frac{z+1}{z-1} + K_D^D \frac{z-1}{zT_s}\right) \quad (5.6)$$

gdzie T_s jest czasem dyskretyzacji. Również w przypadku dyskretnego czasu można wyróżnić rzeczywisty regulator PID.

5.2.1.2. Zastosowanie

W przypadku rozważanego modelu obiektu, przy założeniu obserwacji całego stanu, można użyć niewielkiej modyfikacji podanych wzorów. Ponieważ regulacji podlega zmienna stanu x_1 , której obserwowaną pochodną jest zmienna x_2 , w równaniu (5.2) różniczkowanie można zastąpić bezpośrednio tą zmienną.

Dodatkową modyfikacją wprowadzoną do algorytmu PID jest sprzężenie od zmiennej x_3 , aby zapewnić powrót **CMG** do pozycji równowagi.

W punkcie 4.8 pokazano, że przy zastosowaniu regulatora liniowego, po osiągnięciu pewnego wychylenia **CMG**, układ może utracić stabilizację. Dzieje się tak, ponieważ macierz sterowania jest proporcjonalna do wartości wyrażenia $\cos x_3$. Dlatego, aby usunąć tę nieliniowość, sterowanie podzielono przez funkcję $\cos x_3$. Tym samym ostateczna formuła na sterowanie przedstawiona jest równaniem (5.7):

$$u = \frac{K_P x_1 + K_D x_2 + K x_3}{\cos x_3}. \quad (5.7)$$

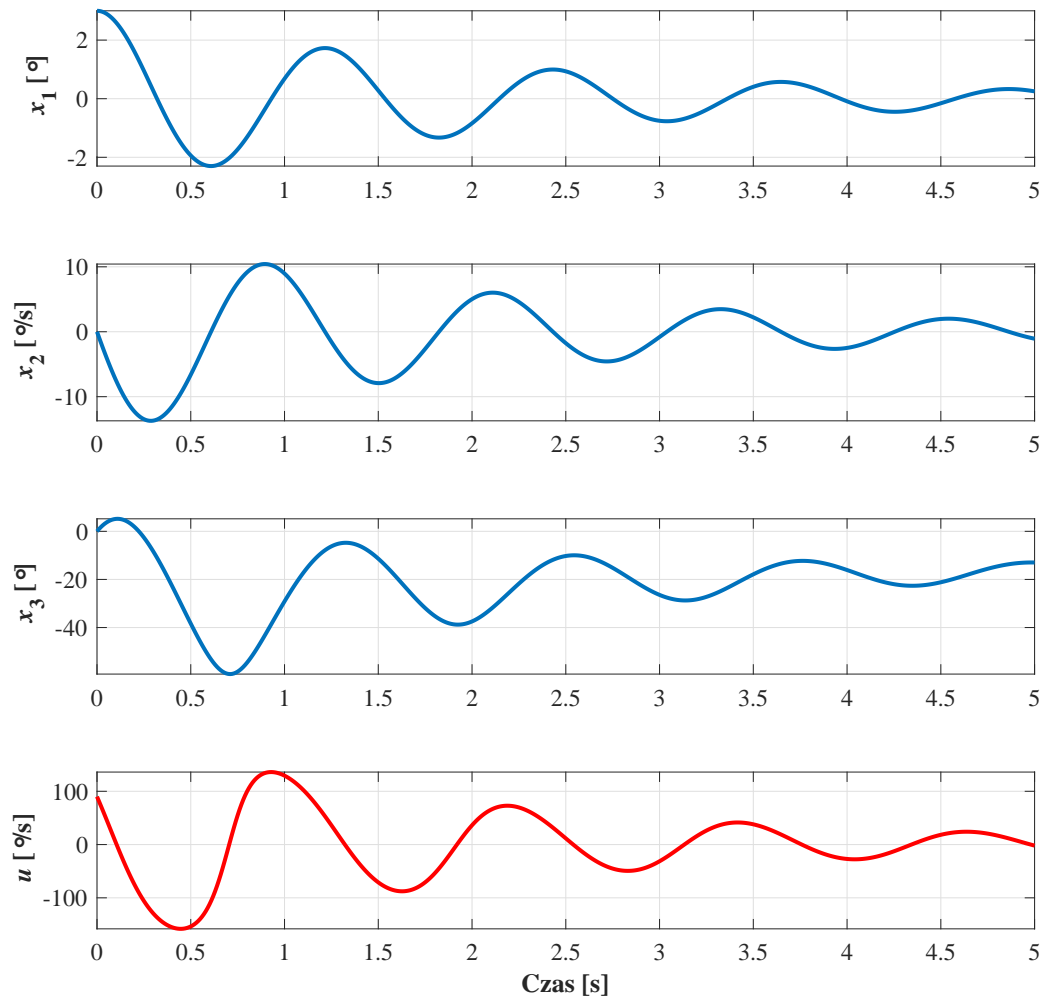
Tak zmodyfikowany regulator będzie dalej nazywany PD_{\cos} .

Przykładowe wyniki symulacyjne dla tak zdefiniowanego sterowania przedstawione zostały na rysunku 5.1.

5.2.2. Regulator liniowo-kwadratowy

5.2.2.1. Teoria

Regulator liniowo-kwadratowy to regulator ze sprzężeniem zwrotnym, który określa rozwiązanie dla tak zwanego problemu LQ – czyli przypadku, w którym układ dynamiczny został opisany przez



Rys. 5.1. Wyniki badań symulacyjnych dla regulatora PD_{cos} .

układ liniowych równań różniczkowych bądź różnicowych, natomiast wskaźnik jakości sterowania zdefiniowany jest przez funkcjonal kwadratowy. Regulator wyznaczony tą metodą jest optymalny w sensie danego wskaźnika jakości. Bardzo dobre i szczegółowe przedstawienie teorii regulatora liniowo-kwadratowego dla różnych klas systemów liniowych można znaleźć w pracach [41] i [44]. W niniejszej pracy przedstawione zostaną tylko podstawowe informacje dla systemów stacjonarnych i przypadku nieskończonego czasu sterowania, zarówno dla systemów z czasem ciągłym jak i dyskretnym. Warto zaznaczyć również, że istnieją prace, w których przedstawiono uodpornioną wersję tego typu sterowania (zobacz [10]).

System z czasem ciągłym

Dla systemów z czasem ciągłym wskaźnik jakości jest zdefiniowany równaniem:

$$J_C(u) = \int_0^{\infty} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt \quad (5.8)$$

gdzie:

$$- Q = Q^T \geq 0,$$

$$- R = R^T > 0.$$

Dla tak zdefiniowanego wskaźnika jakości sterowanie ma postać (5.9):

$$u(t) = -K_C x(t), \quad (5.9)$$

gdzie macierz K_C jest zdefiniowana zgodnie z równaniem (5.10).

$$K_C = R^{-1} B^T P. \quad (5.10)$$

Natomiast macierz P z równania (5.10) jest rozwiązaniem Algebraicznego Równania Riccatiego (ang. *Algebraic Riccati Equation - ARE*):

$$A^T P + P A + P B R^{-1} B^T P + Q = 0. \quad (5.11)$$

System z czasem dyskretnym

W przypadku systemów z czasem dyskretnym wskaźnik jakości definiowany jest równaniem (5.12):

$$J_D(u) = \sum_{k=0}^{\infty} (x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)). \quad (5.12)$$

Podobnie jak w przypadku wersji ciągłej, macierze Q i R muszą spełniać warunki na symetryczność i dodatnią określoność. Natomiast sterowanie zdefiniowane jest zależnością (5.13):

$$u(k) = -K_D x(k). \quad (5.13)$$

Macierz K_D zdefiniowana jest równaniem (5.14):

$$K_D = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A \quad (5.14)$$

gdzie macierz P jest rozwiązaniem Dyskretnego Algebraicznego Równania Riccatiego (ang. *Discrete Algebraic Riccati Equation - DARE*):

$$P = Q + A^T [P - P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P] A. \quad (5.15)$$

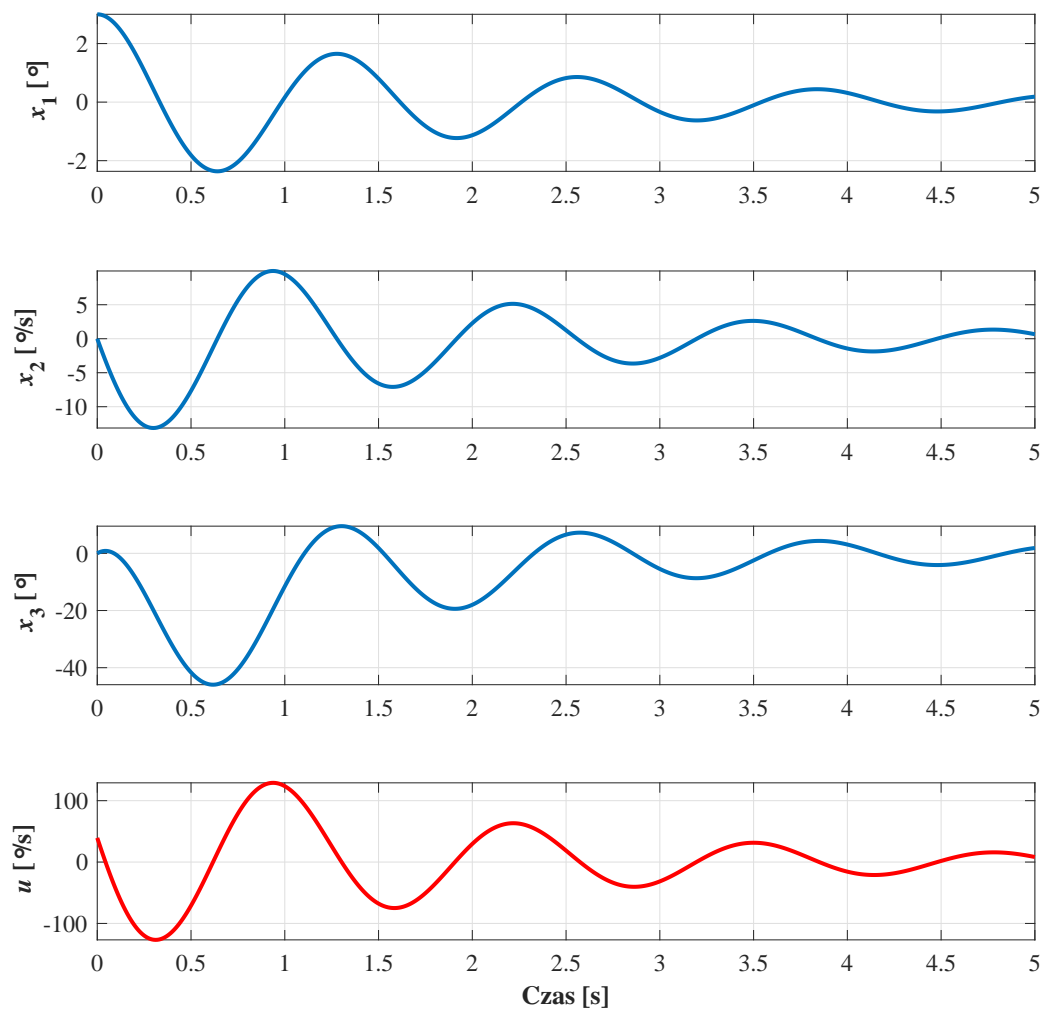
5.2.2.2. Zastosowanie

Podobnie jak w przypadku regulatora PD, wprowadzono modyfikację w związku z nieliniowością w macierzy sterowania. Dlatego formuła na sterowanie przybiera ostatecznie postać (5.16):

$$u(x) = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3}{\cos x_3}. \quad (5.16)$$

Można zauważyć, że regulator ma taką samą strukturę jak PD_{\cos} , jednak jest inna metoda wyznaczania nastaw regulatora.

Przykładowe rezultaty badań symulacyjnych dla regulatora liniowo-kwadratowego przedstawiono na rysunku 5.2.



Rys. 5.2. Wyniki symulacyjne dla regulatora LQ.

5.2.3. Regulator H_∞

Metoda H_∞ w teorii sterowania to termin odnoszący się do metod syntezy regulatorów, które pozwalają na uzyskanie odporności/krzepkości sterowania lub odporności stabilności w teorii liniowych układów regulacji. W tych metodach problem sterowania definiuje się jako zadanie sterowania optymalnego, a następnie projektuje regulator, który może takie zadanie wykonać.

5.2.3.1. Teoria

Model z niepewnymi parametrami

W przypadku systemu sterowania dla układu wspomagającego kierowcę przed utratą stabilizacji, zdecydowanie najbardziej niepewnym parametrem modelu jest masa kierowcy. Jak można zauważyć z równań układów zlinearyzowanych, ten parametr wpływa tylko na wartość elementu a_{21} macierzy przejścia A . Wpływ tego parametru na ten element może być zapisany w formule (5.17).

$$a_{21} = \hat{a}_{21} + \Delta_{max}\delta \quad (5.17)$$

gdzie:

- \hat{a}_{21} - nominalna wartość parametru,
- Δ_{max} - maksymalna wartość zakłócenia,
- $\delta \in [0, 1]$.

Taka forma zapisu prowadzi do schematu blokowego zaprezentowanego na rysunku 5.3. W rozważanym przypadku $y_\Delta = x_1$, gdzie:

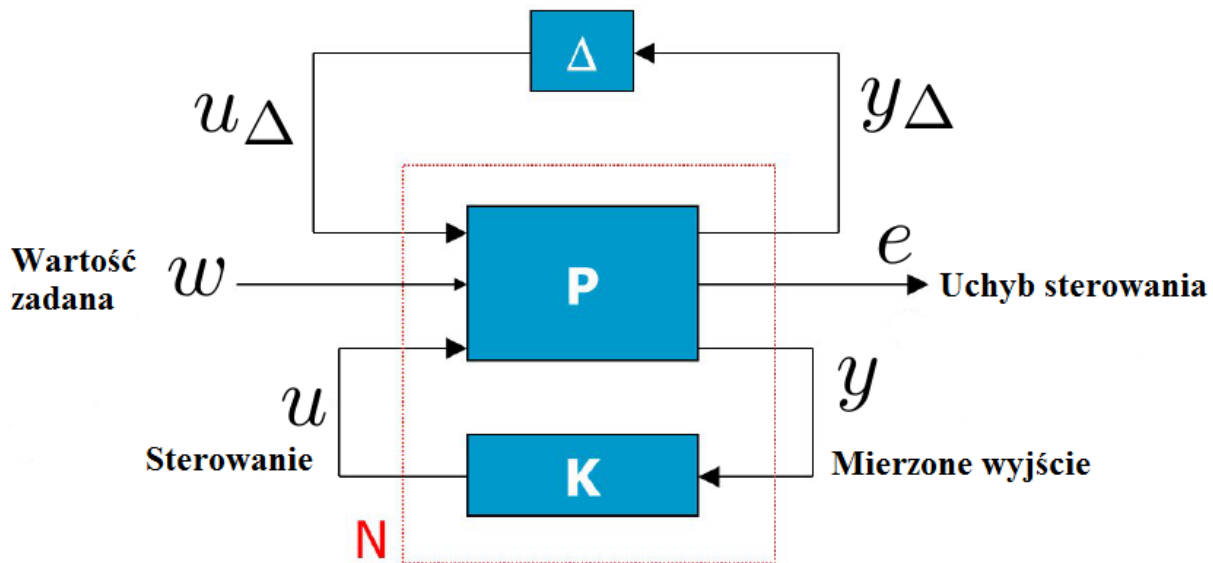
- N - model układu,
- Δ - model niepewności,
- w - sygnał referencyjny,
- e - sygnał błędu,
- y_Δ - niepewność wyjścia,
- u_Δ - niepewność wejścia.

Natomiast N może być przedstawione w formie macierzy (5.18):

$$N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Transmitancja całego układu może zostać przedstawiona w postaci [68]:

$$G = F_u(N, \Delta) = N_{22} + N_{21}\Delta(I - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12}. \quad (5.19)$$



Rys. 5.3. Schemat blokowy sterowania H_∞ .

Synteza regulatora

W praktyce inżynierii sterowania blok N z rysunku 5.3 składa się z dwóch pod-bloków: nominalnego modelu układu P oraz regulatora K . Dzieje się tak, ponieważ analiza stabilności przeprowadzana będzie dla układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego. Macierz N powinna być zdefiniowana jako połączenie obiektu i regulatora. Stąd w podejściu z wykorzystaniem metody H_∞ stosuje się konfigurację przedstawioną schematycznie na rysunku 5.3, a blok N wyraża się zależnością (5.20):

$$F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (5.20)$$

gdzie:

$$- P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix},$$

$$- N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}.$$

Odporna stabilność może być definiowana jako pozostawanie stabilnym przez układ z regulatorem K dla wszystkich obiektów w obszarze niepewności. Zgodnie z definicją N niestabilność może pochodzić tylko od elementu N_{11} . Prowadzi to do badania $M = N_{11}$ i wykorzystania twierdzenia o małych wzmocnieniach (ang. *Small Gain Theorem*) ([68]). Ogólnie rzecz biorąc, celem sterowania jest minimalizacja pewnej normy transmitancji z w do e , na przykład normy H_∞ .

Wymagania projektowe

Równanie (5.21) przedstawia definicję tak zwanej funkcji czułości układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego:

$$S = (I + GK)^{-1} \quad (5.21)$$

gdzie G jest transmitancją obiektu sterowania (model nominalny z niepewnościami), a K jest transmitancją regulatora.

Podstawowym kryterium dla metody H_∞ jest odnalezienie regulatora K , który zapewnia stabilność układu zamkniętego oraz minimalizuje funkcję czułości zgodnie z normą H_∞ (5.22):

$$\min_K \|S\|_\infty = \min_K \sup_{\omega \in R} \|S(j\omega)\|. \quad (5.22)$$

W ogólności, problem optymalizacji H_∞ regulatora może być rozwiązany jako minimalizacja szczytowej wartości wzmocnienia charakterystyki częstotliwościowej. Innymi słowy, optymalizacja H_∞ adresuje dwa problemy:

- układ z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego z regulatorem K musi być asymptotycznie stabilny,
- wpływ zakłóceń d na wyjście y musi zostać zminimalizowany.

Aby zwiększyć możliwości metody H_∞ , można wprowadzić tak zwany problem mieszanej czułości (ang. *Mixed Sensitivity Problem*). Polega on na odnalezieniu regulatora K zapewniającego minimalizację wskaźnika jakości (5.23):

$$\min_{K \text{ stabilizujące}} \left\| \begin{array}{c} W_p S \\ W_u K S \end{array} \right\|_\infty. \quad (5.23)$$

Takie podejście pozwala na utworzenie balansu między jakością sterowania a jego kosztem. W tym przypadku założono wagi W_p i W_u jako:

$$\begin{aligned} W_p &= 10^2, \\ W_u &= 10^{-1}. \end{aligned}$$

Jednak nie muszą być to stałe, lecz mogą być to transmitancje. W ten sposób można lepiej dostosować jakość sterowania do różnych częstotliwości.

5.2.3.2. Zastosowanie

W trakcie realizacji pracy w celu analizy obiektu z niepewnościami i wyznaczenia regulatora posłużono się pakietem MATLAB i toolboxem *Robust Control Toolbox*. Na rysunku 5.4 przedstawione zostały charakterystyki Bodego dla układu otwartego, natomiast rysunek 5.5 pokazuje minimalizację występującej tam szczytowej wartości po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego z regulatorem H_∞ .

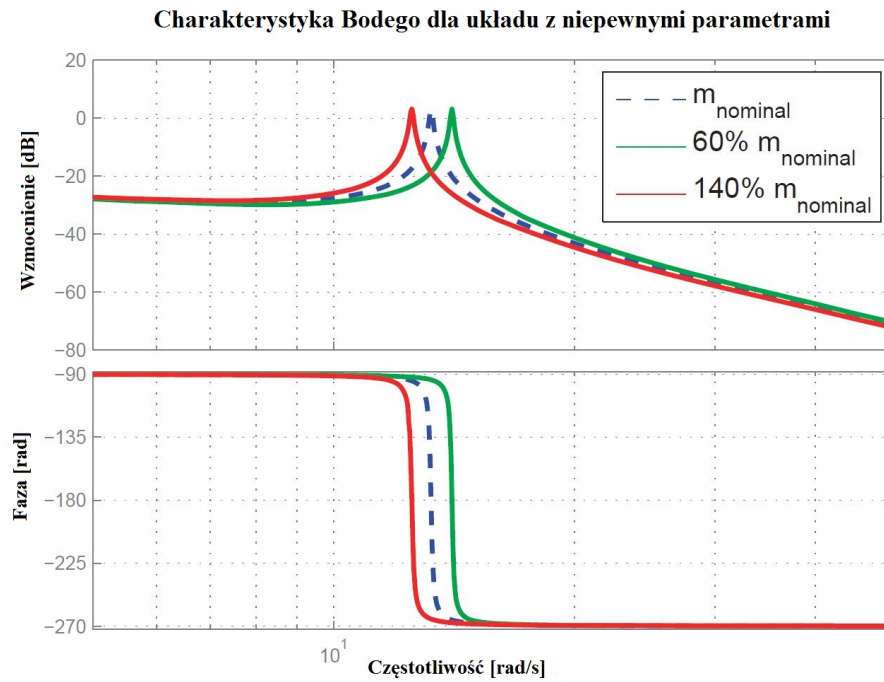
Wyniki badań symulacyjnych przedstawiono na rysunku 5.6.

5.3. Algorytmy nieliniowe

5.3.1. Linearyzujące sprzężenie zwrotne

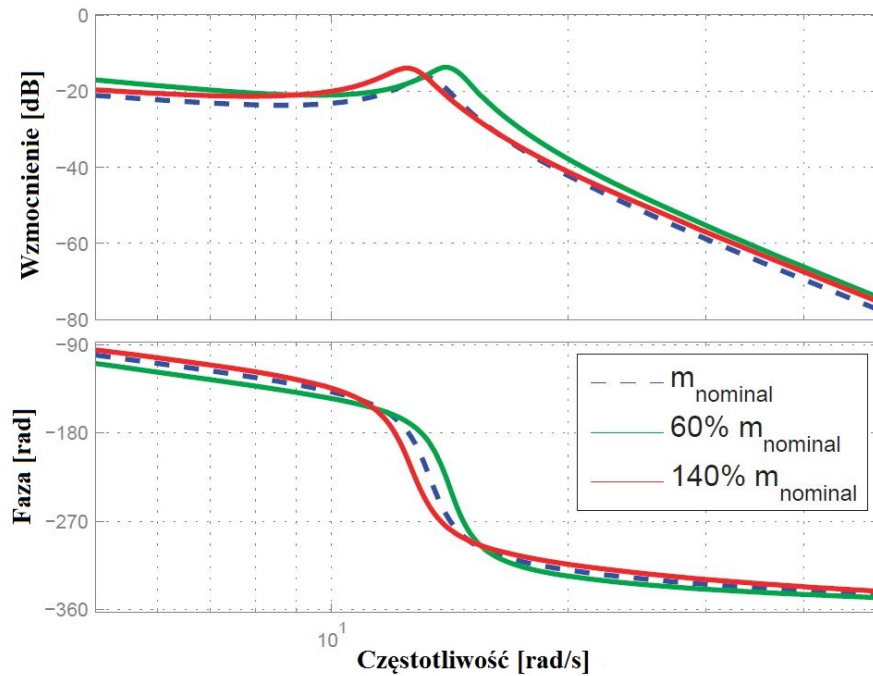
5.3.1.1. Teoria

Metoda linearyzującego sprzężenia zwrotnego polega na znalezieniu takiego dyfeomorfizmu (5.24), aby układ po transformacji przybierał postać liniową. Dla takiego układu liniowego po transformacji,

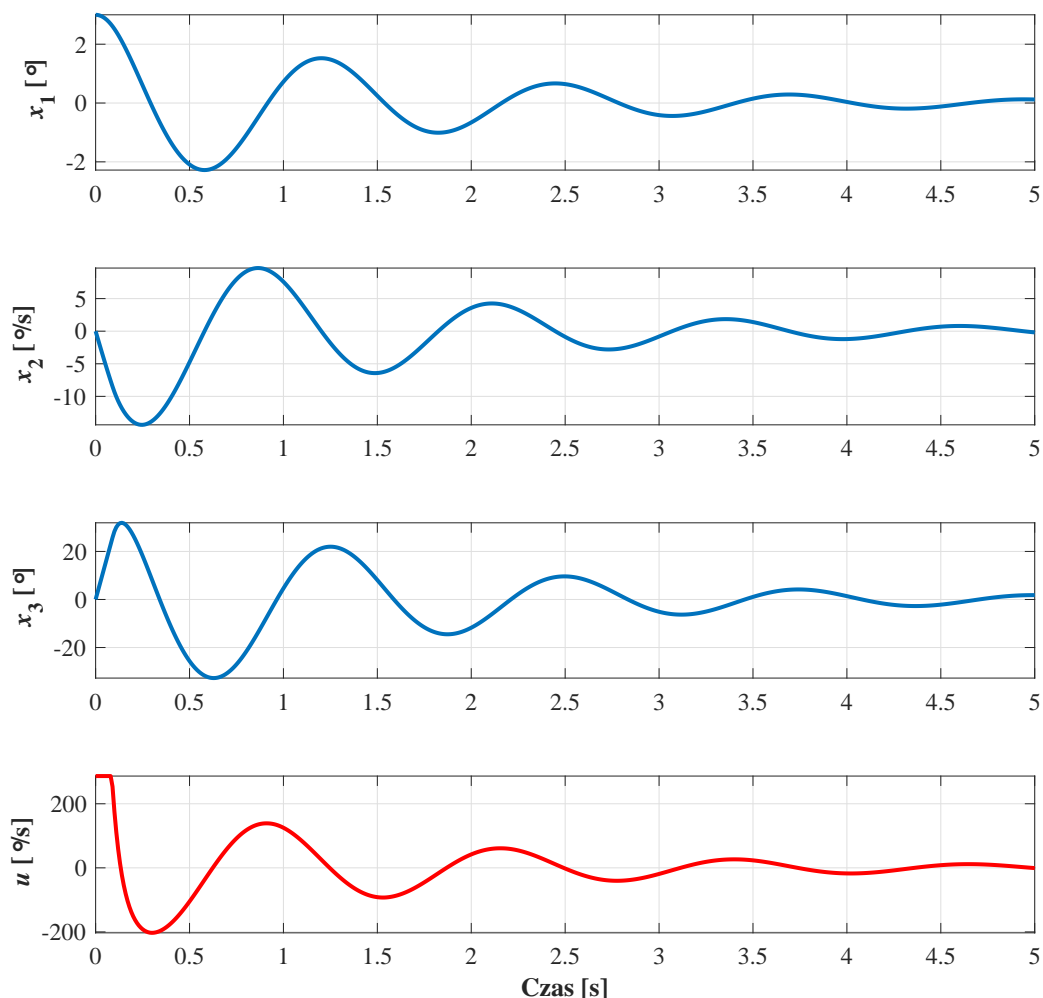


Rys. 5.4. Charakterystyka Bodego układu otwartego dla różnych wartości masy m_{fr} [95].

Charakterystyka Bodego dla układu z niepewnymi parametrami



Rys. 5.5. Charakterystyka Bodego układu z regulatorem H_∞ dla różnych wartości masy m_{fr} [95].



Rys. 5.6. Wyniki badań symulacyjnych dla regulatora H_∞ .

w przetransformowanym już układzie współrzędnych, syntezyje się sterowanie zgodnie z teorią układów liniowych (np. metodą lokowania biegunów). Najczęściej nie można odnaleźć dyfeomorfizmu, który byłby poprawnie zdefiniowany na całej przestrzeni stanu. Dlatego naturalną konsekwencją jest to, że sterowanie projektowane tą metodą również jest poprawne tylko lokalnie.

$$D \in z = T(x), x \in S \quad (5.24)$$

gdzie: $D \subseteq R^r$, $x \subseteq R^n$, $r \leq n$.

Najogólniej rzecz biorąc, rozróżnia się dwa typy linearyzującego sprzężenia zwrotnego, które można skrótowo scharakteryzować w następujący sposób:

Linearyzacja wejście-stan

Ta technika rozwiązuje problem sterowania w dwóch krokach. Pierwszy polega na odnalezieniu transformacji stanu $x: z = z(x)$ oraz transformację wejścia: $u = u(x, v)$ w taki sposób, że nieliniowa dynamika przekształcana jest w równoważny niezależny od czasu układ liniowy $\dot{z} = Az + bv$. Transformacja wejście-stan jest osiągnięta poprzez kombinację transformacji stanu i transformacji wejścia. Drugi etap polega na zaprojektowaniu sterowania v zgodnie ze znanymi technikami dla układów liniowych.

Linearyzacja wejście-wyjście

W tym podejściu transformacja stanu jest osiągnięta poprzez r -krotne różniczkowanie w sensie Lie'go, aż do pojawienia się w wyjściowym równaniu zmiennej sterującej u . Reszta postępowania jest analogiczna do poprzedniego punktu. Zastosowanie takiej transformacji stanu pozwala przedstawić model dynamiki w postaci (5.25):

$$\dot{z} = Az + Bv \quad (5.25)$$

gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Na podstawie sterowania v wyznaczonego dla powyższego układu wyznacza się sterowanie u w postaci (5.27):

$$u = u(v, x). \quad (5.27)$$

Dalsza część niniejszej pracy będzie skupiać się tylko na pierwszej z wymienionych metod - linearyzacji wejście-stan. Ogólny schemat blokowy dla tej metody przedstawiono na rysunku (5.7).

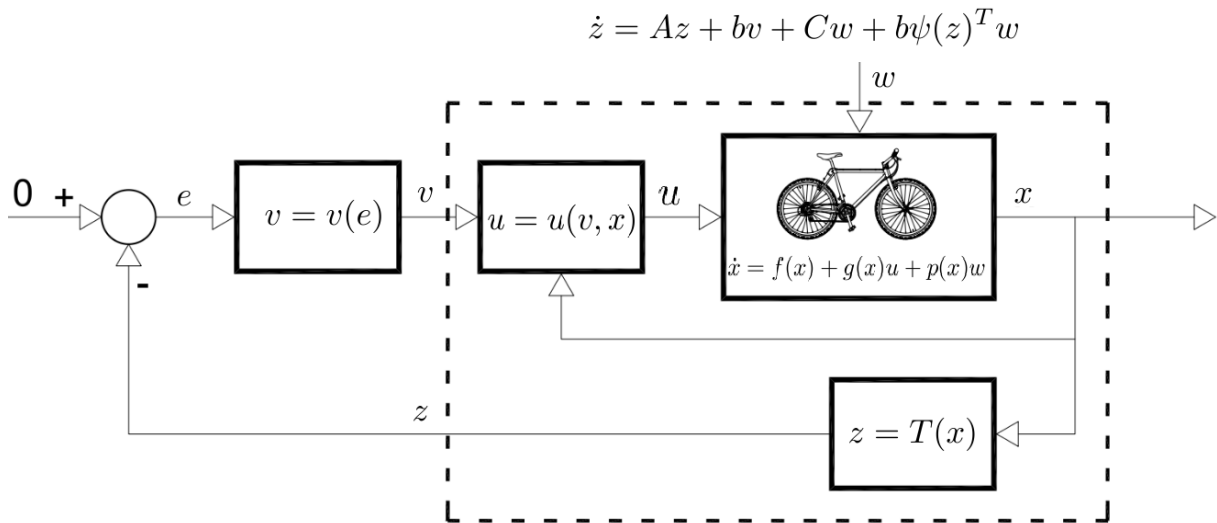
Transformacja Lie'go

Jednym z kluczowych zagadnień związanych z metodą linearyzującego sprzężenia zwrotnego jest pochodna Lie'go, która służy do wyznaczenia transformacji stanu. W tej pracy zostanie przedstawiona jedynie skrótowo jej definicja (równanie (5.28)). Więcej informacji na jej temat i jej interpretację można odnaleźć na przykład w pracach [25] i [72].

$$\begin{aligned} L_f h(x) &= \frac{\partial h}{\partial x} f(x), \\ &\vdots \\ L_f^n h(x) &= \frac{\partial h}{\partial x} [L_f^{n-1} h(x)]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Równanie dynamiki dla rozważanego modelu dynamiki można zapisać w postaci (5.29):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}. \quad (5.29)$$



Rys. 5.7. Schemat sterowania z metodą linearyzującego sprzężenia zwrotnego.

gdzie: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

Dla tak zdefiniowanego układu szukany dyfeomorfizm ma postać (5.30):

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ \mathcal{L}_f h(x) \\ \mathcal{L}_f^2 h(x) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_f^r h(x) \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

Jak widać, wektor $T(x)$ jest wektorem r -elementowym, przy czym r jest tak zwanym względnym stopniem systemu. Jest on definiowany jako maksymalny rząd pochodnej Lie'go, dla której zachodzi warunek (5.31):

$$L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0. \quad (5.31)$$

Dla tak zdefiniowanej transformacji sterowanie u (5.27) przybiera postać:

$$u = u(x, v) = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} (-L_f^r h(x) + v). \quad (5.32)$$

Gdy względny stopień układu jest niższy od r , oznacza to, że istnieje pewna dynamika w układzie, która jest niemożliwa do obserwowania poprzez obserwację samego wyjścia. Jest to tak zwana zerowa dynamika. Aby móc zapewnić poprawność działania układu regulacji, konieczne jest zbadanie czy ta wewnętrzna dynamika posiada własność stabilizacji, czy też nie posiada takiej własności. W kolejnym podpunkcie przedstawiono metodę weryfikacji stabilności wewnętrznej dynamiki.

Zerowa dynamika

W przypadku, gdy względny stopień układu r jest niższy od stopnia oryginalnego układu równań - n , istnieje pewna wewnętrzna, nieobserwowalna dynamika w układzie po transformacji. Aby sprawdzić,

czy ta dynamika jest stabilizowalna i czy możliwe jest utworzenie regulatora w oparciu o tę transformację, można przedstawić tak zwaną postać normalną układu. Wprowadza ona nową transformację stanu (5.33):

$$\phi = \begin{bmatrix} z \\ \psi \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

gdzie:

- $z(x) \in R^r$ i jest zdefiniowane przez transformację (5.30),
- $\psi(x) \in R^{n-r}$,
- zachodzi również równość: $\dot{\psi} = w(z, \psi) = a(z, \psi) + b(z, \psi)u$:
 - $a(z, \psi) = L_f^r h(\phi^{-1}(z, \psi))$,
 - $b(z, \psi) = L_g L_f^{r-1} h(\phi^{-1}(z, \psi))$.

Aby ułatwić analizę, można zlinearyzować ją metodą Taylora w punkcie równowagi - jest to tak zwana zerowa dynamika:

$$\dot{\phi} = \begin{bmatrix} 0 \\ w(0, \psi) \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

5.3.1.2. Zastosowanie

Dyfeomorfizm, odnaleziony dla zredukowanego modelu dynamiki jednoślada zgodnie z równaniem (5.30), ma postać (5.35):

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Jak widać, model po transformacji jest rzędu niższego niż oryginalny. Dlatego konieczne jest sprawdzenie, czy nieobserwowalna dynamika jest stabilna. W celu tej analizy można użyć tak zwanej postaci normalnej [63]:

$$\dot{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_3 \\ a(\mu, \psi) + b(\mu, \psi)u \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

gdzie:

- $a(\mu, \psi) = L_f^2 h(x) = L_f^2 h(T^{-1}(\mu, \psi))$,
- $b(\mu, \psi) = L_g L_f h(x) = L_g L_f h(T^{-1}(\mu, \psi))$

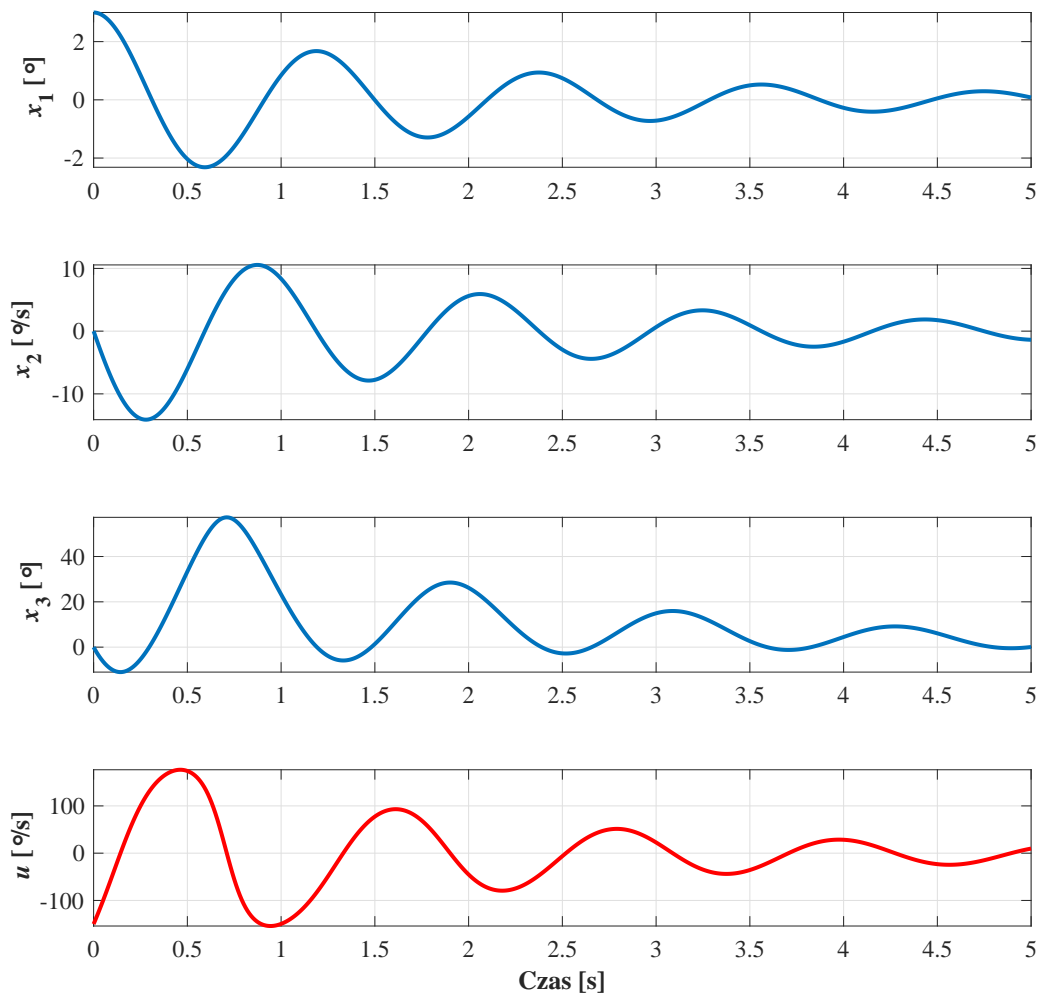
Ponadto zmienna ψ w równaniu (5.36) pochodzi z rozwiązania równania (5.37):

$$L_g \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_3} g(x) = 0. \quad (5.37)$$

Na podstawie tej analizy wywnioskować można, że nieobserwowalna dynamika jest na granicy stabilności, dlatego konieczne jest dodanie do regulatora członu odpowiedzialnego za jego stabilizację. Ostatecznie więc regulator przybiera formę (5.38):

$$u(x) = \frac{1}{L_g L_f h(x)} (-L_f^2 h(x) + v) - x_3$$

$$= \frac{\mathbf{J}(x_1, x_3)}{J_p \omega \cos x_3 - 2(J_p - J_r) \cos x_3 \sin x_3 x_2} (-\mathbf{G} \frac{\sin x_1}{\mathbf{J}(x_1, x_3)} + v) - x_3 \quad (5.38)$$



Rys. 5.8. Wyniki badań symulacyjnych dla metody linearyzującego sprzężenia zwrotnego.

5.3.2. Metoda sterującej funkcji Lapunowa

5.3.2.1. Teoria

Metoda sterującej funkcji Lapunowa (ang. *Control Lyapunov Function - CLF*) została wprowadzona do teorii sterowania w 1983 roku przez Artsteina [8], Sontaga [99]. Od chwili publikacji ma duży wpływ na rozwój teorii stabilizacji nieliniowych systemów afinicznych, opisanych równaniem (5.39):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (5.39)$$

gdzie: $x(t) \in R^n$ i $u(t) \in R^m$.

Dla tak określonego układu może zostać zdefiniowana tak zwana *Small Control Property*.

Twierdzenie 5.1. *Sterująca funkcja Lapunowa dla systemu (5.39) spełnia Small Control Property (SCP) jeśli dla każdego $\epsilon > 0$, istnieje $\delta > 0$ taka, że $x \neq 0$ spełnia $\|x\| < \delta$, wówczas istnieje sterowanie u spełniające warunek $\|u\| < \epsilon$ takie, że $a(x) + b(x)u < 0$, gdzie $a(x)$ i $b(x)$ są zdefiniowane przez formuły:*

$$a(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x), \quad b(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x). \quad (5.40)$$

Można sformułować również twierdzenie [125]:

Twierdzenie 5.2. *Załóżmy, że funkcjonal $V(x)$ spełnia SCP i jest CLF dla systemu (5.39). Wówczas istnieje sterowanie od stanu $u(t) = u(x(t))$, które sprawi, że układ (5.39) jest asymptotycznie stabilny. Sterowanie to można wyznaczyć formułą Sontaga [126]:*

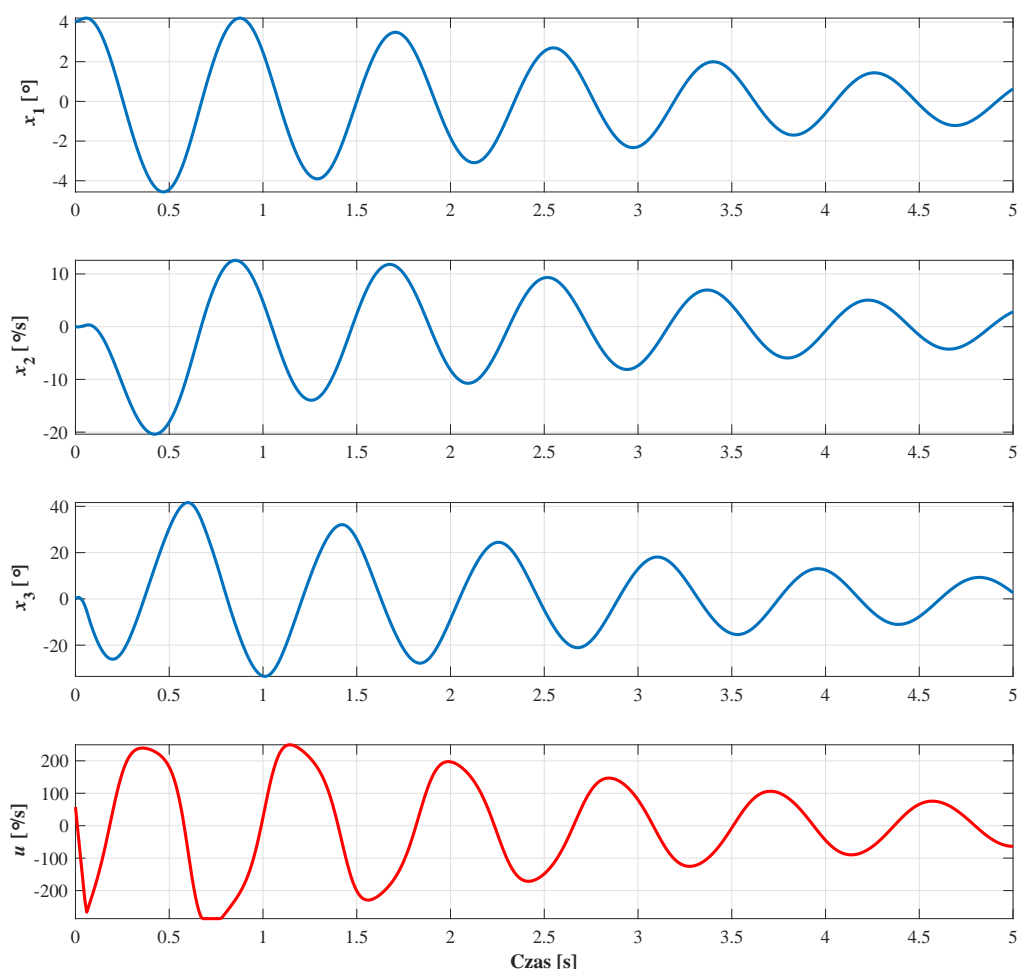
$$u = k(x) = \begin{cases} -\frac{a(x) + \sqrt{a(x)^2 + \|b(x)\|^4}}{b(x)^T b(x)}, & \text{if } \|b(x)\| \neq 0, \\ 0, & \text{if } \|b(x)\| = 0. \end{cases} \quad (5.41)$$

Dla sterowania u zdefiniowanego zgodnie z twierdzeniem (5.2) pochodna po czasie funkcjonu Lapunowa $V(x)$ ma postać (5.42):

$$\dot{V}(x) = a(x) + b(x)u = -\sqrt{a(x)^2 + \|b(x)\|^4} < 0. \quad (5.42)$$

Ta metoda zapewnia globalną asymptotyczną stabilność, jednak nie dostarcza żadnej metody pomagającej odnaleźć funkcję Lapunowa $V(x)$. Dlatego w praktyce można użyć lokalnej funkcji Lapunowa wokół interesującego punktu równowagi. Aby ją odnaleźć, można użyć linearyzacji Taylora lub techniki linearyzującego sprzężenia zwrotnego.

Wyniki symulacyjne podejścia z zastosowaniem funkcji Lapunowa dla układu zlinearyzowanego przedstawiono na rysunku 5.9.



Rys. 5.9. Wyniki badań symulacyjnych dla metody sterującej funkcji Lapunowa.

Odporna metoda stabilizującej funkcji Lapunowa

Po pracach Artsteina i Sonntaga wielu badaczy próbowało rozszerzyć technikę sterującej funkcji Lapunowa do stabilizacji układów z niepewnościami i zakłóceniami.

Propozycje rozszerzeń dla układów z zakłóceniami można znaleźć w pracach Freemana [29], [30]. Kolejnymi publikacjami, gdzie można odnaleźć modyfikację metody **CLF** do tego celu są [43] i [93]. Ponadto, w pracy [55] autorzy proponują metodę konstrukcji funkcji Lapunowa dla pewnej klasy systemów, dla których istnieje dyfeomorfizm, która może być użyteczna dla metody sterującej funkcji Lapunowa.

Innym typem rozszerzeń **CLF** są metody dla układów z niepewnymi parametrami. Takie podejścia można odnaleźć na przykład w pracach [32], [113] i [128].

Podobnie jak w punkcie (5.2.3) dotyczącym metody H_∞ , rozważa się tylko niepewne parametry systemu. W tym celu równania (5.39) przekształcone są do postaci (5.43), gdzie niepewnym parametrem

jest $\nu \in \Omega$ a Ω jest zbiorem zwartym:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(x, \nu) + g(x)u \\ y = h(x) \end{array} \right\}. \quad (5.43)$$

Bazując na pracy [128] zmodyfikowana formuła na $a(x)$ może być przedstawiona w postaci (5.44):

$$\hat{a}(x) = \max_{\nu \in \Omega} \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, \nu) \right). \quad (5.44)$$

Wówczas poprzez zamianę $a(x)$ w równaniu (5.41) przez $\hat{a}(x)$ otrzymuje się pochodną funkcji Lapunowa w postaci (5.45):

$$\dot{V}(t) = a(x) - \hat{a}(x) - \sqrt{a(x)^2 + \|b(x)\|^4} \leq -\sqrt{a(x)^2 + \|b(x)\|^4} < 0. \quad (5.45)$$

Inne metody modyfikacji odporności techniki **CLF** można odnaleźć na przykład w pracach: [29], [30], [43], [55] i [94].

5.3.2.2. Zastosowanie

Odnalezienie funkcjonatu Lapunowa dla układów nieliniowych jest generalnie bardzo trudnym zadaniem i nie istnieje unormowana metoda na jego odnalezienie dla ogólnego systemu nieliniowego. Choć istnieją pewne klasy układów, dla których można podać sugerowaną formę funkcji Lapunowa (np. dla układów Lurie [42]). Jest to więc wąskie gardło metody **CLF**.

W trakcie pracy do uzyskania sterowania bazującego na metodzie **CLF** użyto funkcji Lapunowa wyznaczonej dla układu zlinearyzowanego metodą Taylora.

5.3.3. Sterowanie w reżimie ślizgowym

5.3.3.1. Teoria

Sterowanie w reżimie ślizgowym (ang. *Sliding Mode Control* - **SMC**) jest nieliniową metodą sterowania, która zmienia dynamikę układu (5.39) sterowanego poprzez zastosowanie nieciągłego sygnału sterującego, tworząc tak zwany system przełączany (ang. *switching system*). W efekcie trajektoria układu sterowanego składa się z dwóch etapów: dochodzenia do powierzchni ślizgu, a następnie „ślizgania się” wzdłuż zadanej powierzchni ślizgu [101].

Powierzchnia ślizgowa jest najczęściej definiowana w postaci liniowej (5.46):

$$\sigma(x) = s_1 x_1 + s_2 x_2 + \dots + s_n x_n = S^T x, \quad (5.46)$$

i tylko taka forma będzie tutaj rozważana.

Zadaniem regulatora jest zatem utrzymanie nowo wprowadzonej zmiennej ślizgowej $\sigma(x)$ w punkcie x^{eq} . W celu badania stabilności układu w nowym układzie współrzędnych wprowadza się funkcję Lapunowa w postaci (5.47) [54]:

$$V(\sigma(x)) = \frac{1}{2} \sigma(x)^T \sigma(x). \quad (5.47)$$

Wówczas jej pochodna wynosi:

$$\dot{V}(\sigma(x)) = \sigma(x)\dot{\sigma}(x). \quad (5.48)$$

Łatwo zauważyć, że aby pochodna funkcji Lapunowa miała ujemny znak, to $\sigma(x)$ i $\dot{\sigma}(x)$ muszą mieć przeciwne znaki. Konsekwencją tego jest sterowanie w postaci (5.49):

$$u(t) = \begin{cases} +U, & \text{dla } \sigma(x) < 0 \\ -U, & \text{dla } \sigma(x) > 0 \end{cases}. \quad (5.49)$$

Aby istniała powierzchnia ślizgowa, musi istnieć tak zwane sterowanie zastępcze u_{eq} , które sprowadza układ znajdując się na powierzchni ślizgu do punktu równowagi x^{eq} . W celu jego odnalezienia przyrównuje się pochodną powierzchni ślizgowej do zera:

$$\dot{\sigma}(x) = \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} [f(x) + g(x)u] = 0. \quad (5.50)$$

Uzyskuje się z tego sterowanie w postaci 5.51:

$$u_{eq} = - \left[\frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} f(x). \quad (5.51)$$

Dla tak zdefiniowanego sterowania układ zamknięty przybiera postać (5.52):

$$\dot{x} = \left[I - g(x) \left[\frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} \right] f(x). \quad (5.52)$$

Więcej informacji na temat regulatora **SMC** znaleźć można w pracach: [70], [86], [89] i [129].

5.3.3.2. Zastosowanie

W trakcie realizacji pracy do projektowania regulatora ślizgowego posłużono się przybliżeniem liniowym (4.51) układu zredukowanego. Wówczas wektor S musi być tak dobrany, by układ (5.53) był stabilny.

$$\dot{x} = \left[I - B [S^T B]^{-1} S^T \right] Ax. \quad (5.53)$$

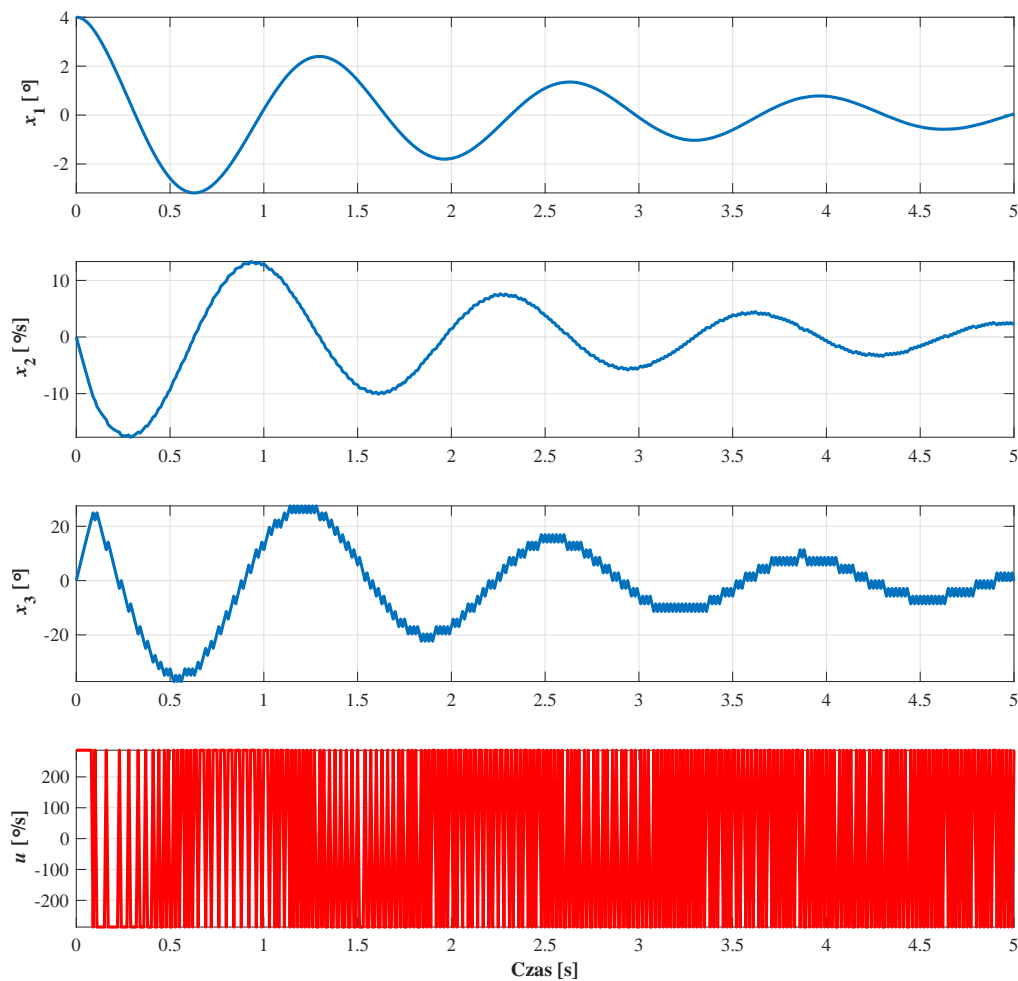
Dla dobranego na tej podstawie wektora S przeprowadzono badania symulacyjne, których przykładowe wyniki przedstawiono na rysunku 5.10.

Można zauważyć, iż wygenerowany sygnał sterujący ma bardzo częste przełączenia między dwiema wartościami skrajnymi zakresu zmiennej sterującej. Jest to zjawisko bardzo niepożądane ze względu na żywotność członu wykonawczego. Aby tego uniknąć, można zastosować przybliżenie sterowania w postaci:

$$u(x) = \begin{cases} +U, & \text{dla } \sigma(x) < -\epsilon \\ -\frac{U\sigma(x)}{\epsilon}, & \text{dla } |\sigma(x)| < \epsilon \\ -U, & \text{dla } \sigma(x) > \epsilon \end{cases} \quad (5.54)$$

gdzie: $\epsilon > 0$.

Na rysunku 5.11 przedstawiono wyniki symulacyjne dla tak właśnie zrealizowanego sterowania przybliżonego. Widać tam, iż pozbyto się w zupełności niepożądanego zachowania.



Rys. 5.10. Wyniki badań symulacyjnych dla sterowania w reżimie ślizgowym.

5.3.4. Sterowanie z redukcją zakłóceń

5.3.4.1. Teoria

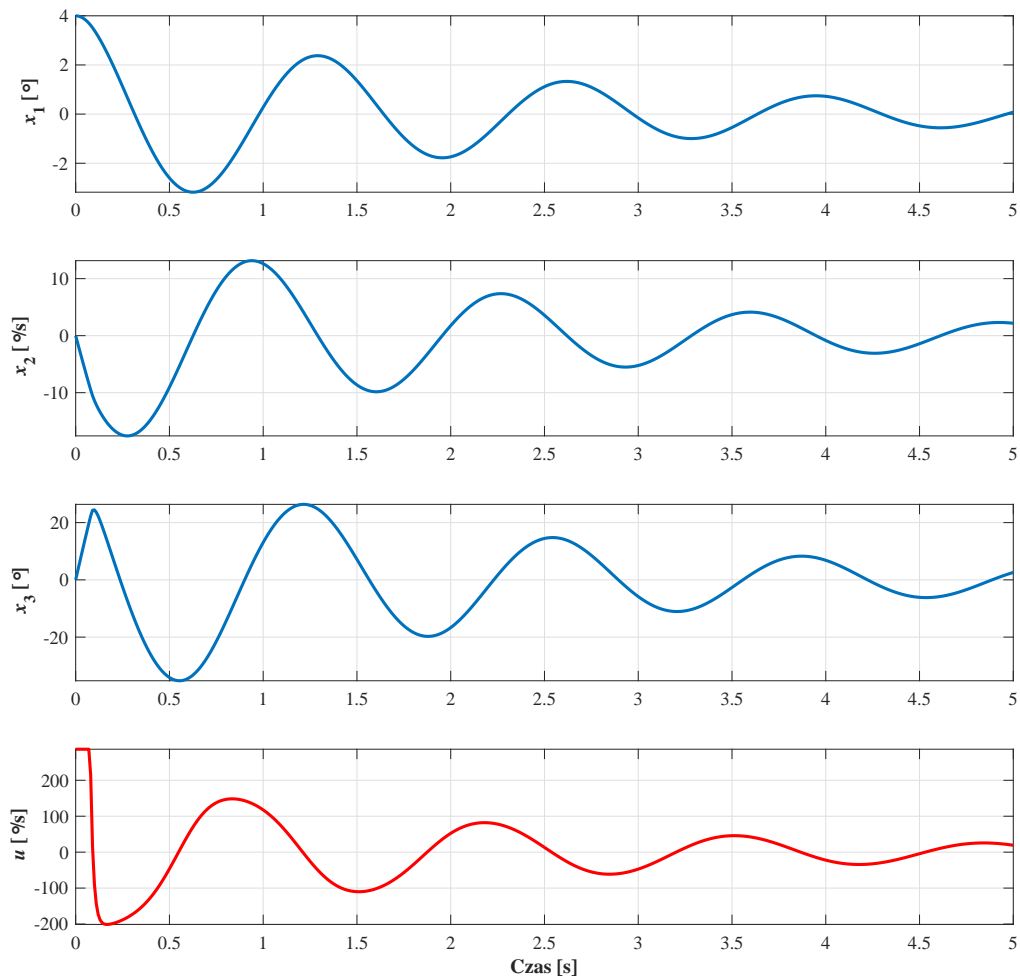
Obserwator zakłóceń

Ten rozdział prezentuje jedno z podejść do realizacji Nieliniowego Obserwatora Zakłóceń (ang. *Non-linear Disturbance Observer - NDOB*) [14] dla nieliniowych systemów afinicznych, które mogą zostać przedstawione w postaci równań (5.55):

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u + g_2(x)d \quad (5.55)$$

dla którego zachodzą następujące zależności:

$$- x \in R^n, u \in R^m, y \in R^m,$$



Rys. 5.11. Wyniki badań symulacyjnych dla sterowania w reżimie ślizgowym z wygładzonym sterowaniem.

- $d \in R^l$ zakłócenie, które jest nieznane, ale zakłada się jego ograniczoność,
- $f(x)$, $g_1(x)$ i $g_2(x)$ są gładkimi polami wektorowymi,
- $f(x)$ i $g_1(x)$ prezentują nominalny model obiektu.

Strukturę obserwatora **NDOB** (zaproponowaną w pracy Chena [14]), która może zostać użyta do estymacji zakłócenia d , można przedstawić w postaci równań (5.56):

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{d} = z + p(x) \\ \dot{z} = -l(x)g_2(x)z - l(x)[g_2p(x) + f(x) + g_1(x)u] \end{array} \right\} \quad (5.56)$$

gdzie:

- $\hat{d} \in R^m$ - estymowane zakłócenie,

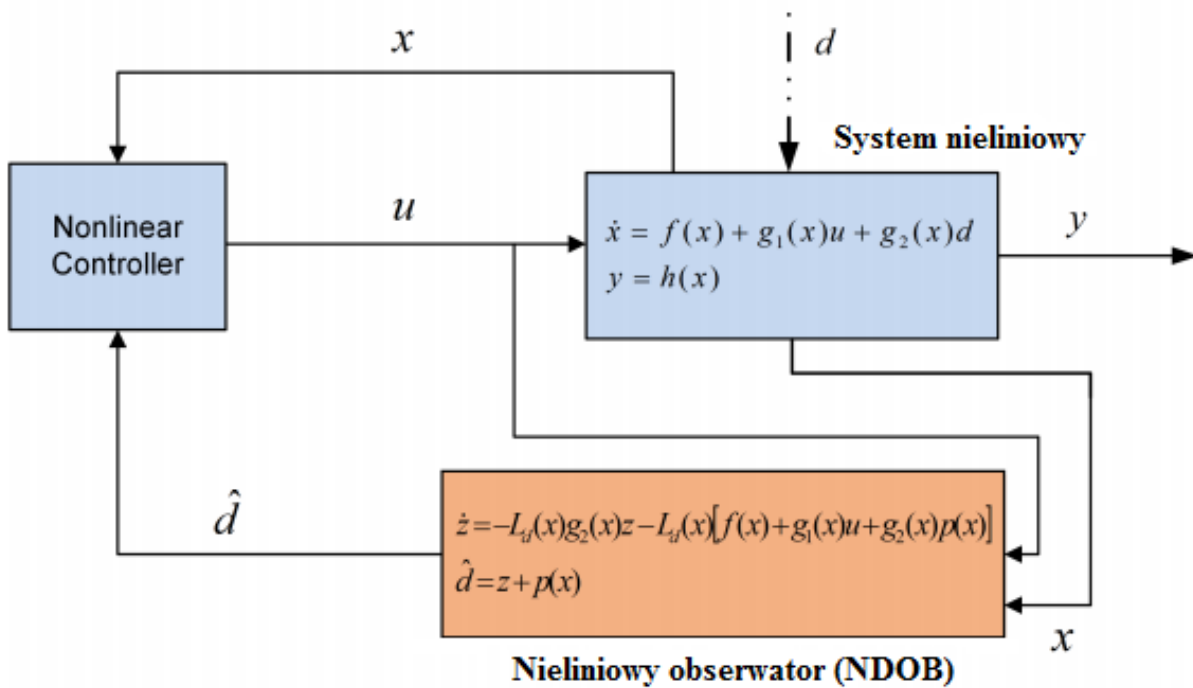
- $z \in R^m$ - wewnętrzny stan obserwatora,
- $p(x)$ - macierz pomocnicza obserwatora **NDOB** - ta funkcja musi zostać zaprojektowana,
- $L_d(x) = \frac{\partial p(x)}{\partial x}$ - macierz wzmocnienia obserwatora **NDOB**.

W trakcie procesu projektowania obserwatora funkcja pomocnicza $p(x)$ powinna być wybrana w taki sposób, by uproszczona dynamika błędu (równanie (5.57)) była stabilna - założono uproszczenie, że $\dot{d} \approx 0$.

$$\dot{e} = -L_d(x)g_2(x)e \quad (5.57)$$

gdzie: $e = \hat{d} - d$.

Przykładowy schemat blokowy systemu sterowania, gdzie został użyty taki właśnie obserwator zakłóceń, przedstawiony jest na rysunku (5.12).



Rys. 5.12. Schemat blokowy układu sterowania z nieliniowym obserwatorem zakłóceń [80].

Innymi publikacjami, w których można znaleźć bardziej szczegółowe podejście do opisu tego typu obserwatorów są na przykład: [15], [16], [77], [88], [105] i [124].

Algorytm sterowania

Bazując na pracy Yanga [119], można przedstawić cztery podstawowe kroki procesu projektowania odpornego sterownika z nieliniowym obserwatorem zakłóceń (ang. *Nonlinear Disturbance Observer Based Robust Control - NDOBRC*) dla obiektu sterowania opisanego równaniem (5.55). Są to:

1. Projekt bazowego sterowania bazującego na sprzężeniu zwrotnym, zapewniającego stabilność wokół punktu pracy, nie uwzględniającego niepewności i zakłóceń.
2. Uwzględnienie zewnętrznych zakłóceń poprzez projekt nieliniowego obserwatora zakłóceń **NDOB**.
3. Projekt macierzy kompensacji zakłóceń w celu osiągnięcia pożądanej jakości sterowania przy obecności załóceń.
4. Złożenie wszystkich poprzednio zaprojektowanych elementów.

Regulator z kompensacją zakłóceń może mieć postać (5.58):

$$u(x, \hat{d}) = \alpha(x) + \beta(x)\hat{d} \quad (5.58)$$

gdzie:

- $\alpha(x)$ jest nominalnym regulatorem zaprojektowanym bez uwzględnienia zakłóceń,
- $\beta(x)$ jest macierzą kompensacji zakłóceń, projektowaną w kroku 3,
- \hat{d} jest estymatą zakłócenia z obserwatora **NDOB** - równanie (5.56).

Macierz kompensacji zakłóceń w idealnym przypadku powinna w pełni usuwać ich wpływ i spełniać warunek (5.59), jednak nie zawsze jest możliwy do spełnienia.

$$g_1(x)\beta(x)\hat{d} = -g_2(x)d. \quad (5.59)$$

W pracy Yanga [119] zaproponowano następującą formułę na macierz kompensacji zakłóceń:

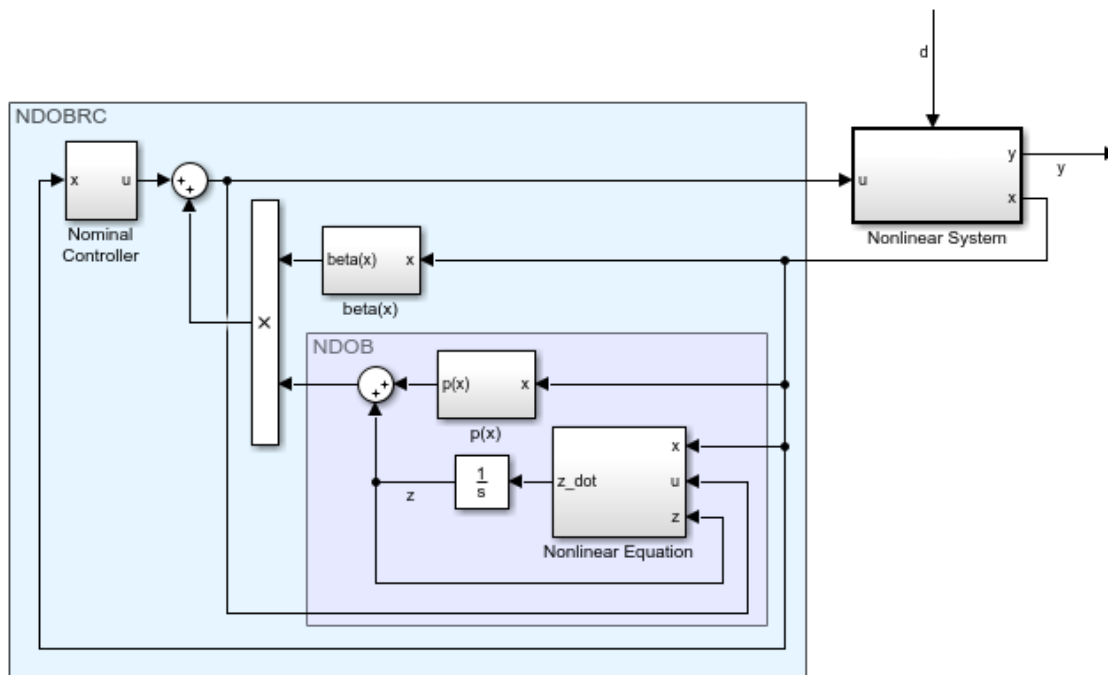
$$\beta(x) = -\{\bar{h}(x)[\bar{f}(x) + g_1\bar{\alpha}(x)]^{-1}g_1(x)\}^{-1} \bar{h}(x)[\bar{f}(x) + g_1\bar{\alpha}(x)]^{-1}g_2(x) \quad (5.60)$$

gdzie:

- $\bar{f}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$,
- $\bar{h}(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x}$,
- $\bar{\alpha}(x) = \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x}$.

Schemat układu sterowania z większą ilością szczegółów jest zaprezentowany na rysunku 5.13.

Więcej informacji na temat sterowania z redukcją zakłóceń można znaleźć w pracach: [17], [37], [78] i [85].



Rys. 5.13. Schemat regulatora z obserwatorem zakłóceń - **NDOBRC** - zrealizowany w pakiecie Simulink.

5.3.4.2. Zastosowanie

Obserwator zakłóceń

Jak zostało pokazane w punkcie 5.3.4.1, struktura rozważanego nieliniowego obserwatora zakłóceń ma postać równań (5.56), a jego parametrem projektowym jest funkcja $p(x)$. W literaturze można odnaleźć kilka metod jej wyznaczania. Dla przykładu w pracy Chena [14] sugeruje się funkcję $p(x)$ w postaci (5.61):

$$p(x) = KL_f^{r-1}h(x) \quad (5.61)$$

gdzie:

- $K = [k_1, \dots, k_m]^T$ - wektor wzmocnień - ich wartości należy wyznaczyć w procesie projektowania obserwatora,
- L_f^n - pochodna Lie'go n -tego rzędu,
- r - relatywny stopień układu na torze zakłócenie-wyjście.

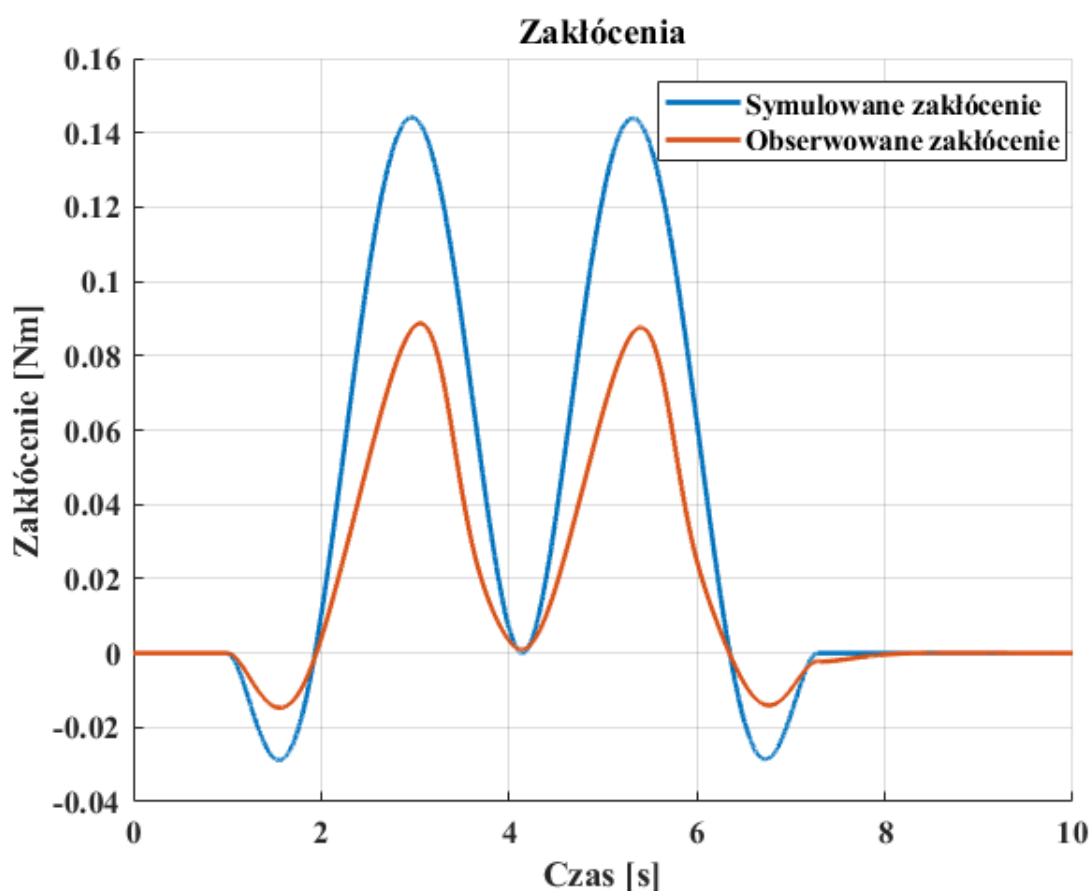
W tej pracy zdecydowano się jednak na inne podejście. W rozważanym przypadku użyto przybliżenia taylorowskiego systemu (5.55). Decyzja jest uzasadniona faktem, iż funkcja $g_2(x)$ jest stałą macierzą. To uproszczenie pozwala na projekt funkcji $p(x)$ w postaci (5.62):

$$p(x) = Lx \quad (5.62)$$

gdzie $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{bmatrix}$ jest stała macierzą.

Liniowe przybliżenie zostało użyte tylko do projektowania funkcji (5.62), pozostała część obserwatora została wykonana zgodnie z równaniami (5.56).

W ramach badań symulacyjnych założono, że zakłócenie $d(t)$ pochodzi od ruchu kierownicy. Wyniki pracy obserwatora dla takiego przypadku przedstawiono na rysunku 5.14. Pokazano na nim porównanie symulowanej wartości zakłócenia i wartości estymowanej. Można zauważyć, że różnice wartości symulowanych i estymowanych są dość duże, jednak zachowany jest trend zmian. Tak duże różnice spowodowane są tym, iż obserwator **NDOB** wyprowadzony został przy założeniu, że $\dot{d} \approx 0$, natomiast symulowane zakłócenia miały dość szybkie zmiany (maksymalna prędkość zmian wynosi około $150^\circ/\text{s}$).



Rys. 5.14. Rzeczywiste i obserwowane zakłócenie.

Kompensacja zakłóceń

Algorytm kompensacji zakłóceń musi spełniać warunek (5.59). W przypadku rozważanego układu ma formę:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ g_1^2(x) \\ 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{d}. \quad (5.63)$$

Zakłócenie d ma bezpośredni wpływ tylko na drugą zmienną stanu. Prowadzi to do macierzy kompensacji $\beta(x)$ z formuły (5.58) na regulator **NDOBRC** w postaci (5.64):

$$\beta(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{g_1^2(x)} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.64)$$

Algorytm sterowania

W trakcie badań symulacyjnych jako bazowego regulatora użyto regulatora LQ. Przeprowadzono kilka symulacji, w których porównano wyniki przy obecności zakłóceń dla:

- regulatora LQ bez kompensacji zakłóceń,
- regulator LQ z obserwatorem zakłóceń **NDOB**,
- regulator LQ z dokładną symulowaną wartością zakłóceń.

Rezultaty symulacji przedstawiono na rysunku 5.15. Można zauważyć, jak duży wpływ na jakość regulacji ma występowanie zakłóceń. Z przedstawionych rezultatów widać również, że różnica między użyciem dokładnej wartości zakłócenia a wartości estymowanej jest stosunkowo niewielka.

5.3.5. Proponowane sterowanie odporne

5.3.5.1. Teoria

W tym podrozdziale przedstawiona została metoda opracowana dla modelu jednoślądu w postaci (4.48).

Pseudo-linearyzacja

Równanie dynamiki jednoślądu (4.48) można przedstawić w postaci „pseudo-liniowej”:

$$\dot{x} = A(x)x + g(x)u. \quad (5.65)$$

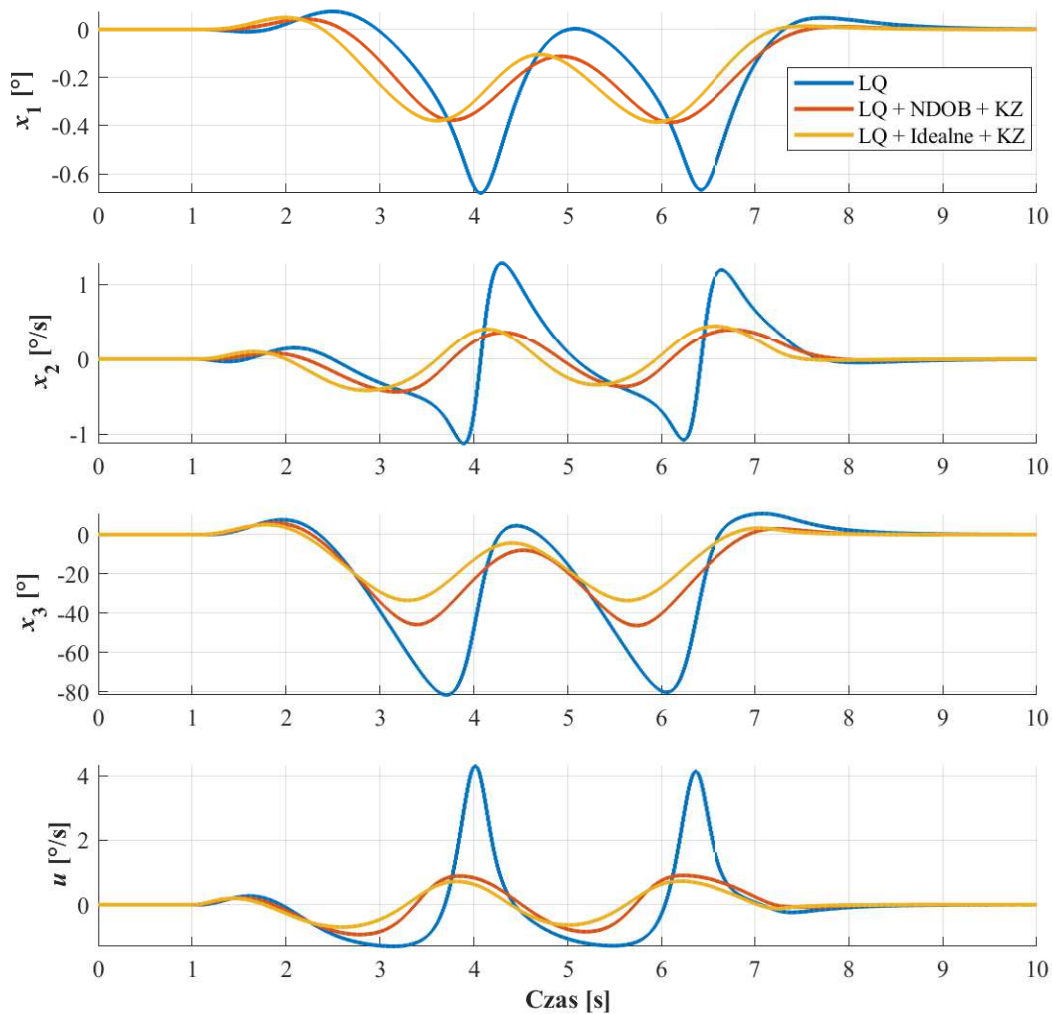
Po rozwinięciu przybiera ono postać (5.66):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{f_2(x)}{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(x) \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (5.66)$$

Algorytm sterowania

Dla układu (5.65) zdefiniowanego w poprzednim punkcie można zaproponować sterowanie w postaci (5.67):

$$u(x) = k_1^3(x)x_1 + k_2^3(x)x_2 + k_3^3(x)x_3. \quad (5.67)$$



Rys. 5.15. Wyniki badań symulacyjnych dla regulatora **NDOBRC** z użyciem regulatora LQ jako bazowego. Przedstawiono również porównanie z rezultatami symulacyjnymi dla regulatora LQ bez kompensacji zakłóceń (KZ) oraz z kompensacją dla dokładnej wartości symulowanej.

Po rozwinięciu przyjmują one formę:

$$\dot{x} = A_3(x)x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{f_2(x)}{x_1} + g_2(x)k_1^3(x) & g_2(x)k_2^3(x) & g_2(x)k_3^3(x) \\ k_1^3(x) & k_2^3(x) & k_3^3(x) \end{bmatrix} x . \quad (5.68)$$

Warunki stabilności mogą być odnalezione poprzez analizę pierwiastków wielomianu charakterystycznego macierzy A_3 . Wielomian zdefiniowany jest wzorem (5.69):

$$\alpha_3(\lambda) = \det(I\lambda - A_3) = \lambda^3 + a_2^3\lambda^2 + a_1^3\lambda + a_0^3 \quad (5.69)$$

gdzie:

$$- a_2^3 = -k_3^3(x) - g_2(x)k_2^3(x),$$

$$- a_1^3 = -g_2(x)k_1^3(x) - \frac{f_2(x)}{x_1},$$

$$- a_0^3 = \frac{f_2(x)}{x_1}k_3^3(x).$$

Warunki na stabilność wielomianu (5.69) mogą zostać wyprowadzone przez analizę warunków Hurwitza [79]. Warunki wynikające z tego kryterium wymienione są poniżej:

$$- \Delta_1 > 0:$$

$$a_2^3 > 0, \quad (5.70)$$

$$- \Delta_2 > 0:$$

$$\begin{vmatrix} a_2^3 & a_0^3 \\ a_3^3 & a_1^3 \end{vmatrix} = a_2^3 a_1^3 - a_3^3 a_0^3 > 0, \quad (5.71)$$

$$- \Delta_3 > 0:$$

$$\begin{vmatrix} a_2^3 & a_0^3 & 0 \\ a_3^3 & a_1^3 & 0 \\ 0 & a_2^3 & a_0^3 \end{vmatrix} = a_0^3 (a_1^3 a_2^3 - a_0^3) > 0. \quad (5.72)$$

Warunki przyjmują skomplikowaną formę i trudno jest odnaleźć ograniczenia na funkcje $k_1^3(x)$, $k_2^3(x)$, $k_3^3(x)$ z równania na sterowanie (5.67). Aby uprościć proces projektowania regulatora, podzielono go na dwa etapy:

1. Projekt regulatora dla niezerowej dynamiki - redukuje rząd układu do $n = 2$. Zatem tylko $k_1^3(x)$ i $k_2^3(x)$ mogą być wyznaczone na tym etapie.
2. Odnalezienie warunków na k_3^3 po zastosowaniu $k_1^3(x)$ i $k_2^3(x)$ wyznaczonych w kroku poprzednim.

Stan bez dynamiki zerowej

Równania niezerowej dynamiki mają postać:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(x) \end{bmatrix} u. \quad (5.73)$$

Proponowany regulator ma postać (5.74):

$$u_2(x) = K_2(x)x = k_1^3(x)x_1 + k_2^3(x)x_2. \quad (5.74)$$

Wówczas układ z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego ma formę (5.75):

$$\dot{x} = A_2(x)x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{f_2(x)}{x_1} + g_2(x)k_1^3(x) & g_2(x)k_2^3(x) \end{bmatrix} x, \quad (5.75)$$

z wielomianem charakterystycznym w postaci (5.76):

$$\alpha_2(\lambda) = \det(I\lambda - A_2) = \lambda^2 + a_1^2\lambda + a_0^2 \quad (5.76)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} - a_1^2 &= g_2(x)k_2^3(x), \\ - a_0^2 &= -\frac{f_2(x)}{x_1} - g_2(x)k_1^3(x) \end{aligned}$$

Również tym razem analiza stabilności może zostać przeprowadzona za pomocą kryterium Hurwitza.

$$- \Delta_1 > 0:$$

$$a_2^2 > 0, \quad (5.77)$$

$$- \Delta_2 > 0:$$

$$\begin{vmatrix} a_2^2 & a_0^2 \\ 1 & a_1^2 \end{vmatrix} = a_2^2 a_1^2 - a_0^2 > 0. \quad (5.78)$$

Z powyższych warunków (5.77) i (5.78) wyznaczane są ograniczenia na funkcje $k_1^2(x)$, $k_2^2(x)$ w postaci (5.79):

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1^3(x) \leq -\frac{f_2(x)}{g_2(x)x_1} \\ k_2^3(x) \leq -C_2, \text{ gdzie } C_2 > 0 \end{array} \right\}. \quad (5.79)$$

Zatem funkcje $k_1^3(x)$, $k_2^3(x)$ można wyznaczyć jako (5.80):

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1^3(x) = -\frac{f_2(x)}{g_2(x)x_1} - C_1, \text{ gdzie } C_1 > 0 \\ k_2^3(x) = -C_2, \text{ gdzie } C_2 > 0 \end{array} \right\}. \quad (5.80)$$

Stan z zerową dynamiką

Po wprowadzeniu funkcji (5.80) do układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (5.68), jego równania przyjmują formę (5.81):

$$A_3(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -g_2(x)C_1 & -g_2(x)C_2 & g_2(x)k_3^3(x) \\ -\frac{f_2(x)}{g_2(x)x_1} - C_1 & -C_2 & k_3^3 \end{bmatrix}. \quad (5.81)$$

Z równania (5.81), warunków (5.70)-(5.72) oraz dodatkowego założenia upraszczającego $k_3^3(x) > 0$, wyznaczyć można warunki na $k_3^3(x)$ w postaci (5.82).

$$\left\{ \begin{array}{l} k_3^3(x) < g_2(x)C_2 \\ k_3^3(x) \leq \frac{g_2(x)C_1C_2x_1}{f_2(x)+g_2(x)C_1x_1} \\ k_3^3(x) > 0 \end{array} \right\}. \quad (5.82)$$

Można zauważyć, że warunki nie są sprzeczne w przedziale sterowalności układu.

Analiza Lapunowa

Jeśli wszystkie wartości własne macierzy A_3 zlokalizowane są po lewej stronie płaszczyzny zespolonej, wówczas można pokazać, że równanie Lapunowa (5.84) posiada rozwiązanie $W(x) = W(x)^T > 0$, które jest ciągle względem x . Dla x z przedziału (5.83):

$$x = \left\{ x \in R^3 : x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ and } x_3 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right\}. \quad (5.83)$$

Równanie Lapunowa (5.84) ma postać:

$$W(x)A_3(x) + A_3(x)^T W(x) = -G \quad (5.84)$$

gdzie:

$$-G = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \end{bmatrix},$$

$$-G_i > 0, \text{ dla } i = 1, 2, 3.$$

Na tej podstawie można ustalić funkcjonal Lapunowa w formie (5.85):

$$V(x) = x^T W(x)x. \quad (5.85)$$

Jego pochodna zaś przyjmuje postać (5.86):

$$\dot{V}(x) = -x^T Gx < 0, \forall x \neq 0. \quad (5.86)$$

Na podstawie twierdzenia La Salle'a [71] przedział (5.83) może być estymatą obszaru atrakcji.

Wersja odporna

Metoda projektowania regulatora zaproponowana powyżej nie uwzględnia niepewności parametrów układu. Dlatego w tym punkcie zaproponowano jej rozszerzenie dla niepewności niestrukturalnych. Takie niepewności mogą powodować, że funkcje $f_2(x)$ i $g_2(x)$ będą przyjmować wartości z przedziałów (5.87):

$$\begin{aligned} \underline{f_2(x)} &\leq f_2(x) \leq \overline{f_2(x)}, \\ \underline{g_2(x)} &\leq g_2(x) \leq \overline{g_2(x)}. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Takie zakresy zmienności wartości funkcji powodują, że wielomiany charakterystyczne (5.69) i (5.76) mają przedziałową zmienność współczynników - są tak zwanymi wielomianami przedziałowymi. Stabilność tego typu wielomianów można badać za pomocą twierdzenia Charitonowa (5.69) i (5.76)

Twierdzenie 1. *Wielomian przedziałowy:*

$$W(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + a_{n-3}\lambda^{n-3} + \dots + a_0$$

gdzie każdy współczynnik $a_i \in R$ może przybierać dowolną wartość z przedziału:

$$\underline{a_i} \leq a_i \leq \overline{a_i}$$

jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy cztery tak zwane wielomiany Charitonowa:

$$\begin{aligned} W_1(\lambda) &= \lambda^n + \overline{a_{n-1}}\lambda^{n-1} + \underline{a_{n-2}}\lambda^{n-2} + \underline{a_{n-3}}\lambda^{n-3} + \dots \\ W_2(\lambda) &= \lambda^n + \underline{a_{n-1}}\lambda^{n-1} + \overline{a_{n-2}}\lambda^{n-2} + \overline{a_{n-3}}\lambda^{n-3} + \dots \\ W_3(\lambda) &= \lambda^n + \overline{a_{n-1}}\lambda^{n-1} + \overline{a_{n-2}}\lambda^{n-2} + \underline{a_{n-3}}\lambda^{n-3} + \dots \\ W_4(\lambda) &= \lambda^n + \underline{a_{n-1}}\lambda^{n-1} + \underline{a_{n-2}}\lambda^{n-2} + \underline{a_{n-3}}\lambda^{n-3} + \dots \end{aligned} \quad (5.88)$$

są stabilne.

Proces projektowania przebiega podobnie, dwuetapowo, jak w podejściu bez niepewności, z tą różnicą, że zamiast warunków Hurwitza sprawdzane są warunki Charitonowa.

Stan bez dynamiki zerowej

Ograniczenia na wartości wielomianu charakterystycznego (5.76) można wyrazić w formie (5.89):

$$\begin{aligned} -\frac{\overline{f_2(x)}}{x_1} - \underline{g_2(x)}k_1^3(x) \leq a_0^2 \leq -\frac{\underline{f_2(x)}}{x_1} - \overline{g_2(x)}k_1^3(x) \\ -\underline{g_2(x)}k_2^3(x) \leq a_1^2 \leq -\overline{g_2(x)}k_2^3(x) \end{aligned} \quad (5.89)$$

Bazując na tych ograniczeniach, warunkach (5.77), (5.78) i twierdzeniu (1), warunki na funkcje $k_1^3(x)$ i $k_2^3(x)$ przybierają postać (5.90):

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1^3(x) \leq -\frac{\overline{f_2(x)}}{\underline{g_2(x)}x_1} \\ k_2^3(x) \leq -C_2, \text{ gdzie } C_2 > 0 \end{array} \right\}. \quad (5.90)$$

Na podstawie tych ograniczeń można wyznaczyć funkcje $k_1^2(x)$ i $k_2^2(x)$ w następujący sposób:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1^2(x) = -\frac{\overline{f_2(x)}}{\underline{g_2(x)}x_1} - C_1, \text{ gdzie } C_1 > 0 \\ k_2^2(x) = -C_2, \text{ gdzie } C_2 > 0 \end{array} \right\}. \quad (5.91)$$

Stan z zerową dynamiką

Dla analizy układu z pełnym stanem można podobnie jak poprzednio dodać założenie upraszczające $k_3^3(x) > 0$. Prowadzi to do ograniczeń na współczynniki wielomianu charakterystycznego w formie (5.92):

$$\begin{aligned} \frac{\underline{f_2(x)}}{x_1}k_3^3(x) \leq a_0^3 \leq \frac{\overline{f_2(x)}}{x_1}k_3^3(x), \\ -\underline{g_2(x)}k_1^3(x) - \frac{\underline{f_2(x)}}{x_1} \leq a_1^3 \leq -\overline{g_2(x)}k_1^3(x) - \frac{\overline{f_2(x)}}{x_1}, \\ -k_3^3(x) - \underline{g_2(x)}k_2^3(x) \leq a_2^3 \leq -k_3^3(x) - \overline{g_2(x)}k_2^3(x). \end{aligned} \quad (5.92)$$

Z warunków Charitonowa ograniczenia na $k_3^3(x)$ mają postać (5.93):

$$\left\{ \begin{array}{l} k_3^3(x) < \overline{g_2(x)}C_2 \\ k_3^3(x) \geq \frac{\underline{g_2(x)}\underline{g_2(x)}C_1C_2x_1}{\underline{g_2(x)}C_1x_1 + \underline{f_2(x)}} \\ k_3^3(x) > 0 \end{array} \right\}. \quad (5.93)$$

Analogicznie jak w przypadku poprzednim zauważyć można, że warunki nie są ze sobą sprzeczne.

5.3.5.2. Zastosowanie

Implementacja regulatora

Zaprojektowany regulator został zaimplementowany i zweryfikowany w środowisku MATLAB/Simulink. Można zauważyć, że funkcje $k_1^3(x)$, $k_2^2(x)$, $k_3^3(x)$ proponowane w (5.80) i (5.91) posiadają nieciągłość w punkcie $x = \begin{bmatrix} 0 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$. Aby uniknąć problemów spowodowanych tą nieciągłością, regulator został zaimplementowany w postaci (5.94):

$$u(x) = -\frac{\overline{f_2}}{g_2} - C_1 x_1 - \overline{g_2} C_2 x_2 + k(x) x_3 \quad (5.94)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} & - k(x) = \min(\overline{g_2(x)} C_2, c(x)), \\ & - c(x) = \begin{cases} \frac{\overline{g_2(x)} g_2(x) C_1 C_2 x_1}{\overline{g_2(x)} C_1 x_1 + \overline{f_2(x)}} & \text{dla: } |x_1| > \epsilon \\ \frac{\overline{g_2(x)} g_2(x) C_1 C_2}{\overline{g_2(x)} C_1 + \frac{G}{J(x_1, x_3)}} & \text{dla: } |x_1| \leq \epsilon \end{cases} \quad \text{- wyrażenie dla } |x_1| \leq \epsilon \text{ przybiera taką postać ponie-} \\ & \text{waż: } \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{\overline{f_2(x)}}{x_1} = \frac{G}{J(0, x_3)}, \\ & - \epsilon > 0. \end{aligned}$$

Wyniki symulacyjne

Przykładowe wyniki symulacyjne zostały przedstawione na rysunku 5.16.

5.4. Ograniczenie sterowania

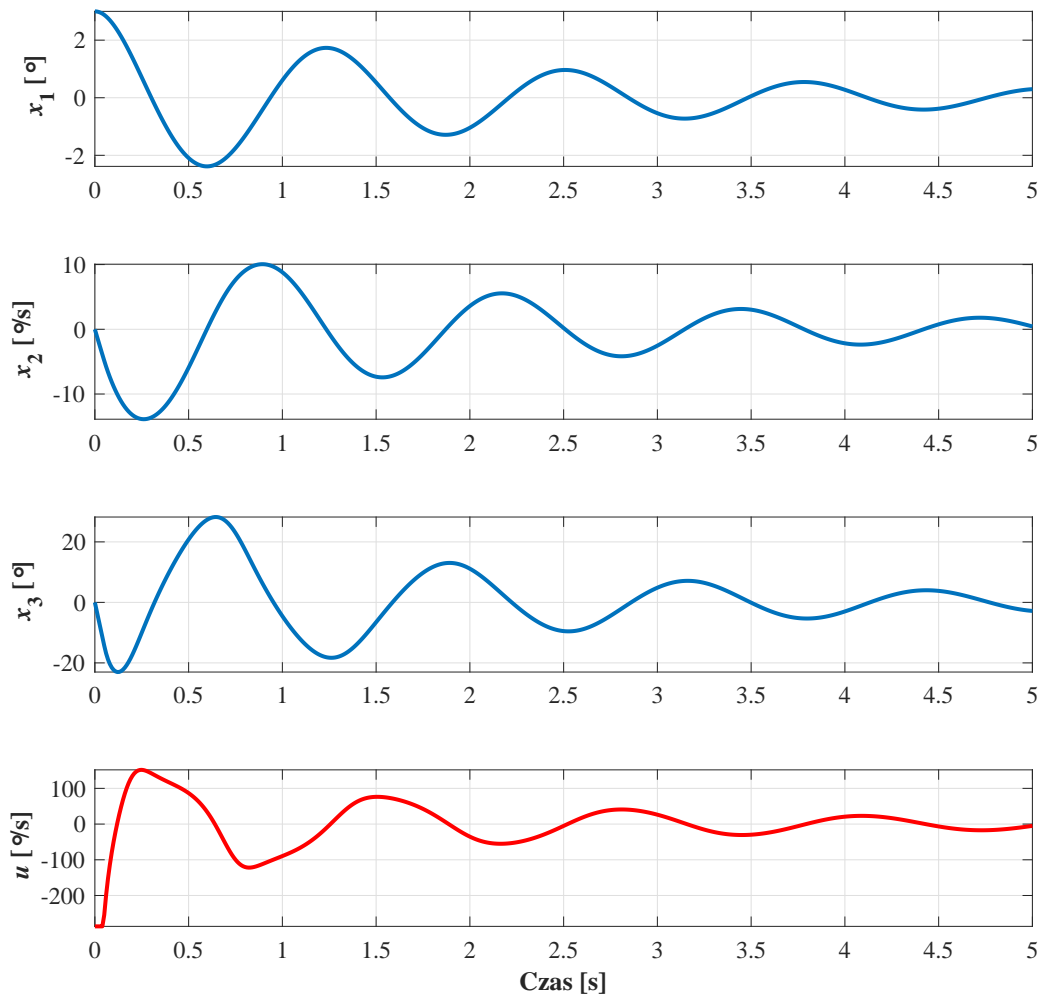
Podczas projektowania regulatorów każdą z omówionych metod zakładano, że $u(t) \in R$, jednak w rzeczywistości nie jest to prawdą i sygnał sterujący przybiera wartości tylko z pewnego przedziału:

$$u(t) \in [u_{min}, u_{max}].$$

Ponadto w rzeczywistym układzie istnieje również ograniczenie na tempo narastania sygnału sterującego:

$$\dot{u}(t) \in [\dot{u}_{min}, \dot{u}_{max}].$$

Ograniczenia te, choć nie uwzględnione w procesie projektowania regulatorów, zostały włączone do modelu symulacyjnego i symulacyjnej weryfikacji regulatora.



Rys. 5.16. Wyniki symulacyjne dla regulatora odpornego.

6. Eksperymenty

6.1. Laboratoryjny model badawczy

W celu eksperymentalnej weryfikacji opracowanych algorytmów stabilizacji zbudowany został laboratoryjny model badawczy. Jako obiekt sterowania wybrano rowerek dziecięcy. Natomiast platformą obliczeniową, na której zdecydowano się zrealizować zaprojektowane algorytmy sterowania w czasie rzeczywistym, został mini-komputer Raspberry Pi 3B+. Ogólnie, w skład układu badawczego wchodzi następujące elementy:

- mini-komputer Raspberry Pi 3 B+,
- silnik krokowy PAN61 wraz ze sterownikiem,
- sensor IMU (*Inertial Measurement Units*),
- silnik BLDC (*BrushLess Direct-Current motor*) wraz ze sterownikiem.

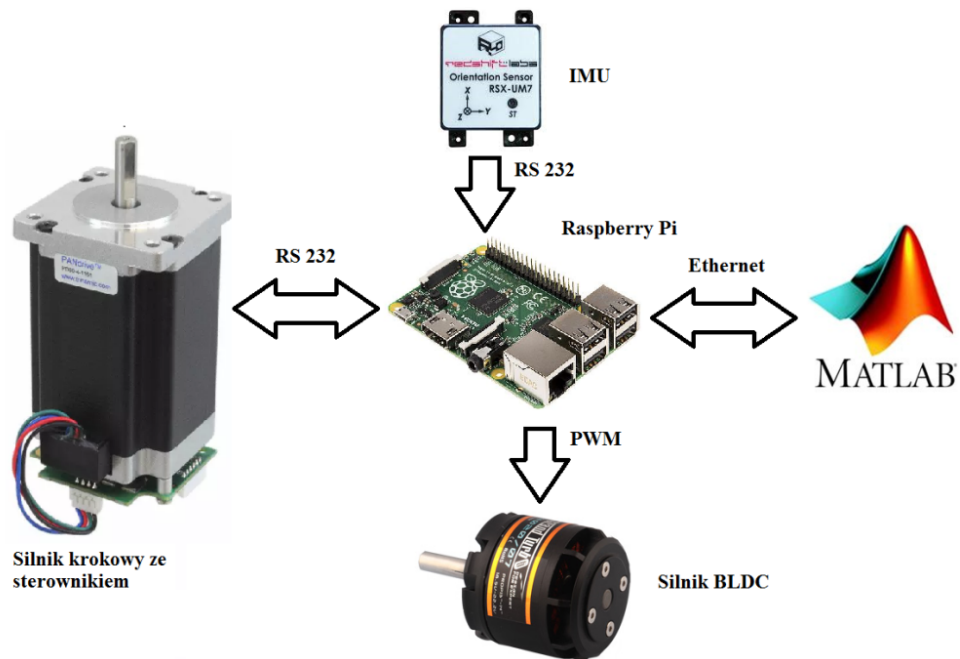
W kolejnych podpunktach opisano pokrótce każdy z tych elementów.

Ideowy schemat połączeń wszystkich elementów przedstawiony został na rysunku 6.1, natomiast widok rzeczywistego zbudowanego modelu laboratoryjnego zobaczyć można na rysunku 6.2.

6.1.1. Sterownik

Raspberry Pi to platforma komputerowa stworzona przez Raspberry Pi Foundation. Składa się z pojedynczego obwodu drukowanego (tak zwany mikro-komputer). Jego najważniejszymi elementami są:

- Chipset Broadcom BCM2837B0 z 64-bitowym rdzeniem Quad-core ARM-8 Cortex-A53 CPU, taktowany 1,4 GHz.
- Moduły wyjścia/wejścia ogólnego przeznaczenia, które mogą służyć do obsługi diod LED, przycisków, sterowników silników. Wśród nich znajdują się złącza obsługujące interfejsy: I2C, SPI i UART.
- Cztery złącza USB.
- Moduł WiFi - pozwala na komunikację z siecią bezprzewodową 2,4 GHz i 5 GHz 802.11b/g/n/ac.



Rys. 6.1. Schemat ideowy połączeń zbudowanego układu.



Rys. 6.2. Funkcjonalny model eksperymentalny.

6.1.2. Czujnik IMU

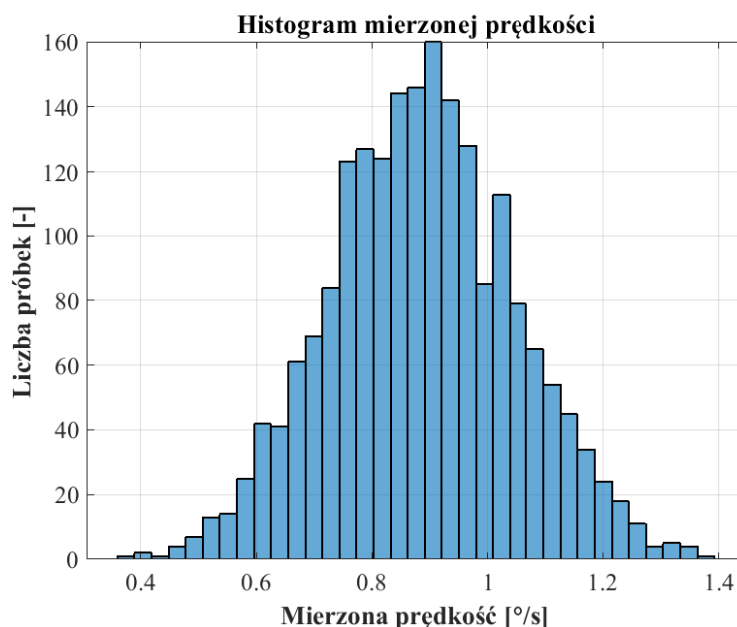
Do realizacji pomiaru wychylenia i prędkości kątowej ramy roweru wybrano czujnik dostępny na płycie rozszerzającej możliwości mikro-komputera Raspberry Pi - Sense Hat, która zawiera między innymi czujnik IMU składający się z akcelerometru, żyroskopu i magnetometru. Jednak do wyznaczenia wychylenia zostały użyte pomiary tylko z dwóch pierwszych czujników.

6.1.2.1. Żyroskop

Podstawowymi parametrami czujnika są:

- obieralny zakres pomiarowy $\pm 245^{\circ}/\pm 500^{\circ}/\pm 2000^{\circ}$,
- obieralna częstotliwość próbkowania $14.9Hz/59.5Hz/119Hz/238Hz/476Hz/952Hz$,
- odchylenie standardowe pomiaru $\sigma_{gyro} = 0.8868^{\circ}/s$ (zmierzona eksperymentalnie),
- pomiar prędkości kątowej wokół 3 osi,
- 32-bitowa rozdzielczość,
- interfejs I2C.

Histogram szumu pomiarowego przedstawiony jest na rysunku 6.3.



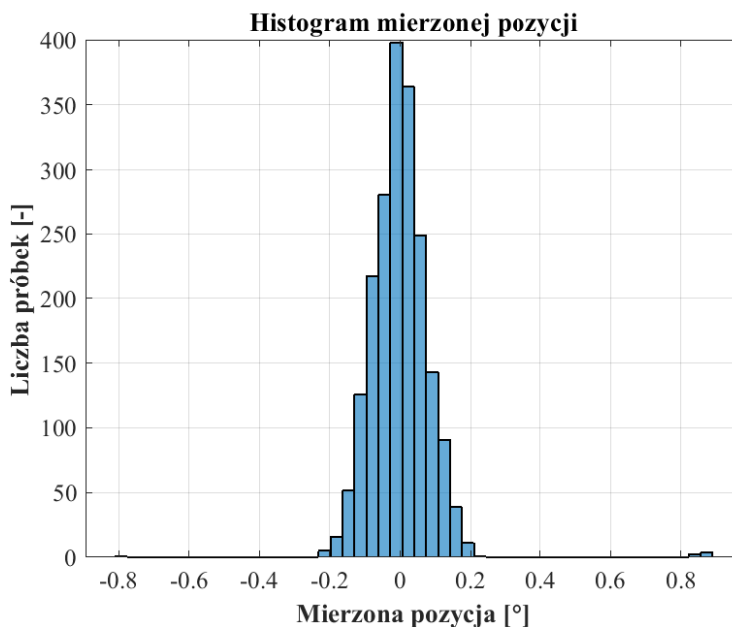
Rys. 6.3. Szum pomiarowy żyroskopu.

6.1.2.2. Akcelerometr

Podstawowymi parametrami czujnika są:

- obieralny zakres pomiarowy $\pm 2g / \pm 4g / \pm 8g / \pm 10g$,
- obieralna częstotliwość próbkowania $10Hz / 50Hz / 119Hz / 238Hz / 476Hz / 952Hz$,
- odchylenie standardowe pomiaru $\sigma_{gyro} = 0,8868 \frac{\circ}{s}$ (zmierzone eksperymentalnie),
- pomiar przyspieszenia wzdłuż 3 osi,
- 32-bitowa rozdzielczość,
- interfejs I2C.

Histogram szumu pomiarowego wyznaczonej pozycji kątowej przedstawiony jest na rysunku 6.4.



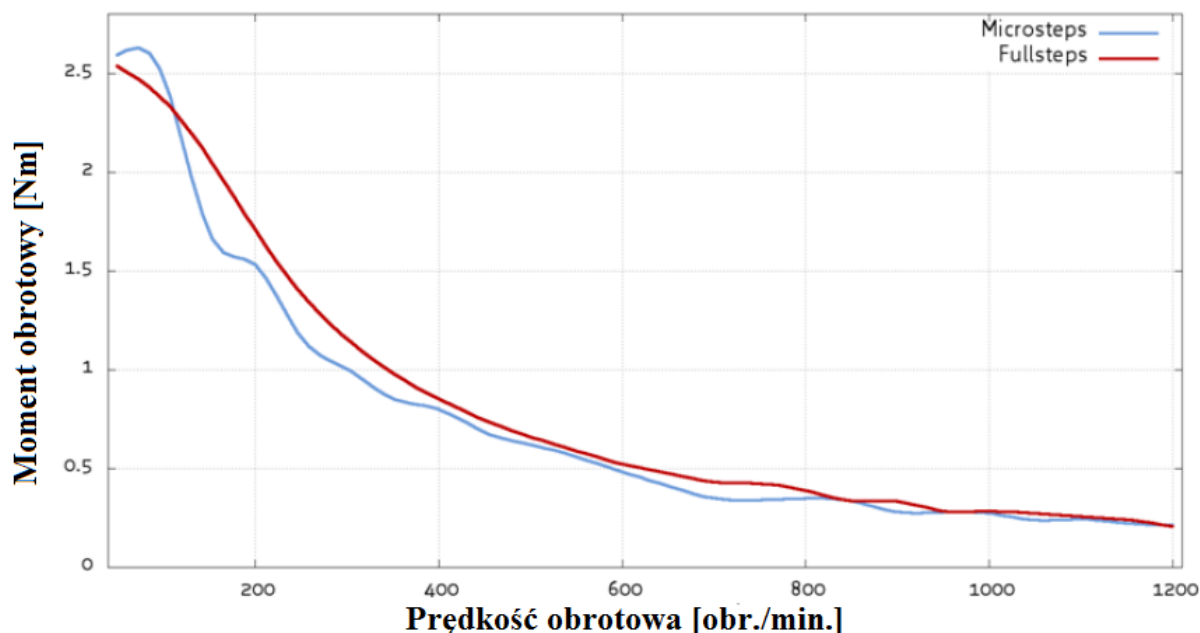
Rys. 6.4. Szum pomiaru kąta.

6.1.3. Silnik krokowy

Do obrotu koła zamachowego zastosowano silnik krokowy PD60-4-1161 firmy TRINAMIC. To układ integrujący w sobie silnik, sterownik i enkoder. Sterownik udostępnia kilka szeregowych interfejsów do komunikacji: USB, RS232 i RS485. W tym przypadku do komunikacji wybrano interfejs RS232.

Silnik posiada rozdzielczość 200 kroków na pełny obrót. Przy zastosowanym sterowniku, umożliwiającym podział kroku na 256 mikro-kroków, daje możliwość pozycjonowania wału silnika z dokładnością do 0.007° . Natomiast prędkość obrotowa może być ustawiona z dokładnością do $20,95 \cdot 10^{-3} \frac{\text{obr}}{\text{min}}$. Użyty

sterownik pozwala również na osiągnięcie prędkości maksymalnej wynoszącej około $1200 \frac{\text{obr.}}{\text{min}}$. Zależność momentu obrotowego w funkcji prędkości obrotowej silnika w tym przedziale prędkości przedstawiono na wykresie 6.5 [110]. Natomiast maksymalny moment trzymający silnika wynosi $3.1Nm$.



Rys. 6.5. Moment silnika krokowego w funkcji prędkości przy napięciu zasilającym $V_s = 24V$ i prądzie cewki $I_{coil} = 2.8A$ [110].

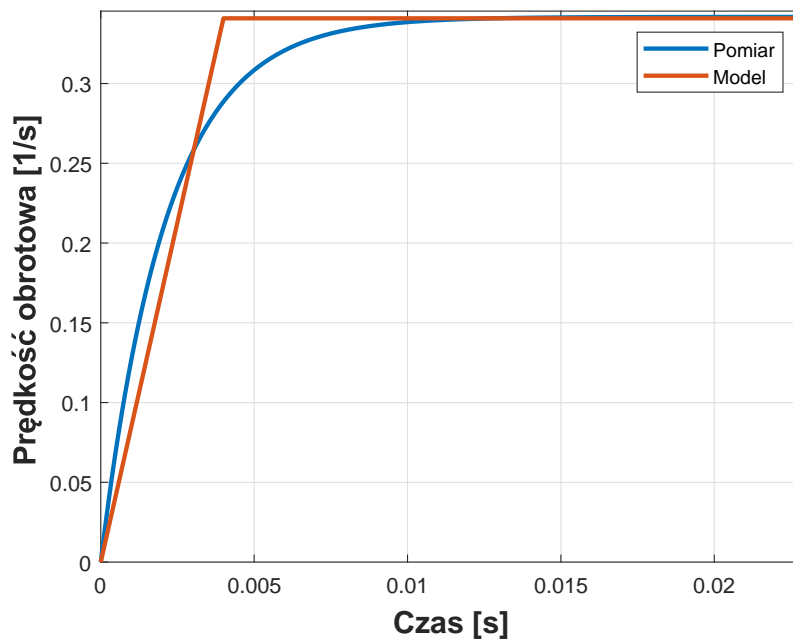
Aby w praktyce można było zrealizować podejście do układu sterowania w oparciu o model ze zredukowanym stanem przedstawionym w rozdziale 4.8, silnik musi posiadać odpowiednio małą stałą czasową. W celu weryfikacji tego założenia zmierzono charakterystykę odpowiedzi skokowej prędkości. Wykres i aproksymacje modelem pierwszego rzędu przedstawiono na rysunku 6.6.

Jak można zaobserwować z wykresu, stała czasowa wynosi około $0.005s$. Tak krótki czas odpowiedzi na wymuszenie skokowe powoduje, iż dynamika silnika jest pomijalnie mała względem całego układu i może zostać pominięta w równaniach dynamiki przy założonym czasie próbkowania $T_s = 0.01s$.

6.1.4. Silnik BLDC

Do napędzania koła zamachowego użyty został silnik BLDC z zewnętrznym rotorem Emax GT2820/06. Jego najważniejszymi parametrami są:

- Napięcie zasilania: $14.8V$,
- $KV = 985 \text{obr./min./V}$,
- prędkość maksymalna: 14578obr./min. ,



Rys. 6.6. Charakterystyka skokowa silnika krokowego wykorzystanego do pozycjonowania CMG.

– masa: 140g.

6.1.5. Układ weryfikacyjny

W celu weryfikacji pomiarów czujnika IMU użyto układu weryfikacyjnego opartego na laserowym pomiarze wychylenia roweru od pionu. Pomiar odległości został przeliczony na kąt zgodnie z formułą (6.1), gdzie oznaczenia są zgodne z rysunkiem 6.7.

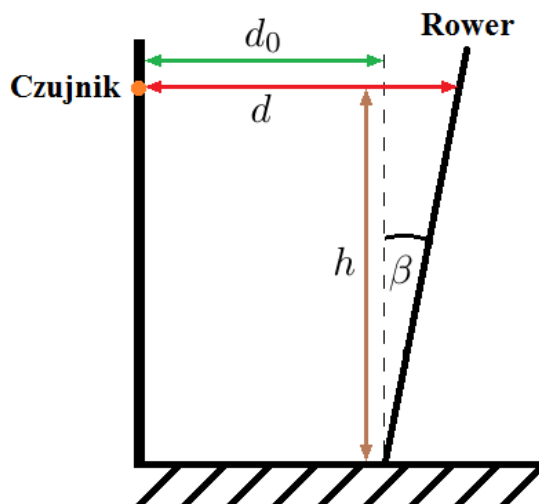
$$\beta = \arctan \frac{d - d_0}{h}. \quad (6.1)$$

Jako czujnik laserowy pomiaru odległości wybrano czujnik Keyence LR-TB5000, który posiada analogowy interfejs wyjściowy. Wyjściowe napięcie zostało zmierzone za pomocą karty pomiarowo-sterującej RT-DAC, która była obsługiwana z poziomu pakietu MATLAB. Krótki opis obydwu elementów zamieszczony jest w punktach 6.1.5.1 i 6.1.5.2.

6.1.5.1. Czujnik laserowy

Do pomiaru odległości wybrano czujnik LR-TB5000 firmy Keyence. Jego najważniejszymi parametrami są:

- zasięg pomiaru 60 – 5000mm,
- rozdzielczość 1mm,
- interfejs analogowy z wyjściem napięciowym.



Rys. 6.7. Schemat układu weryfikacyjnego.

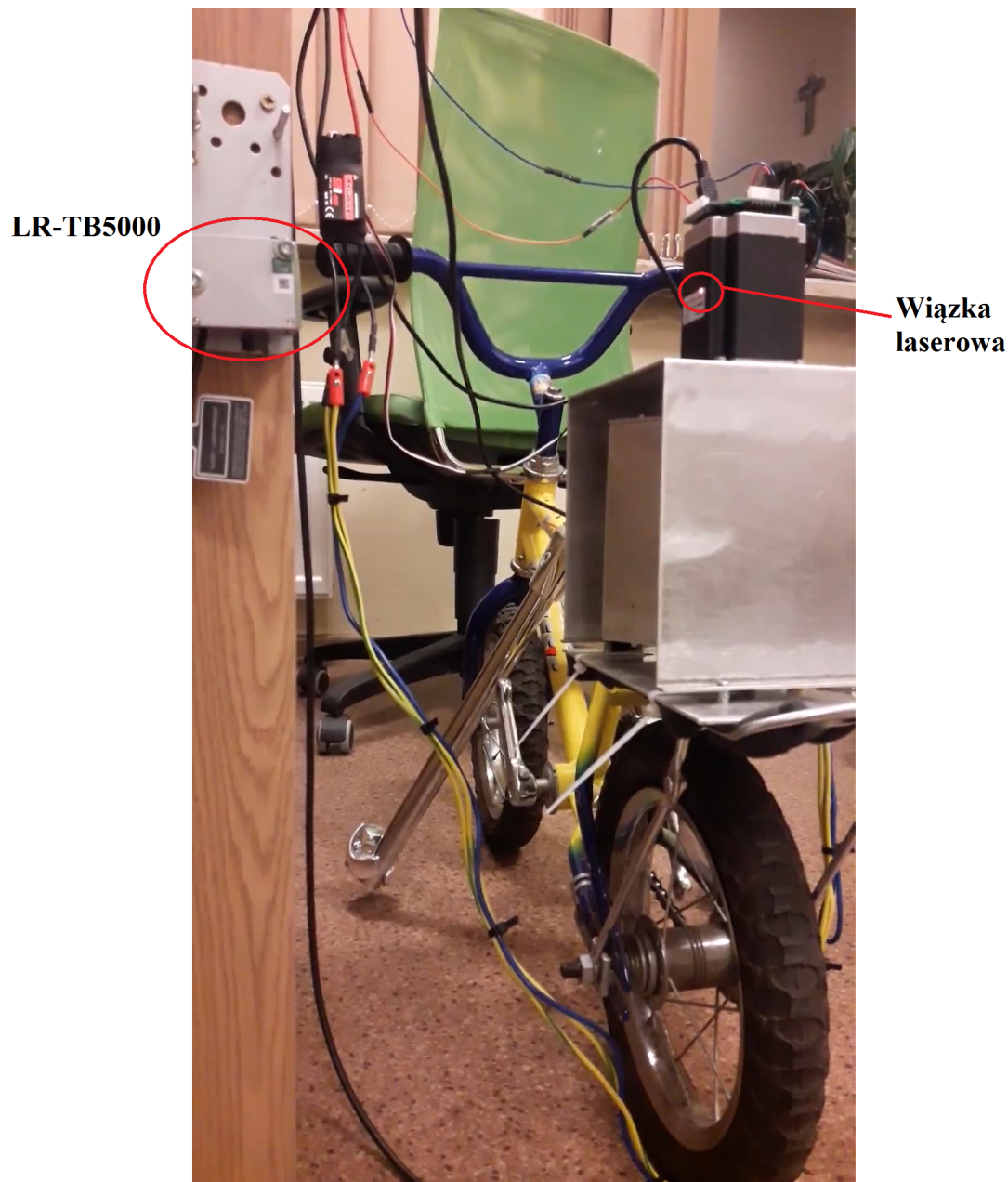
6.1.5.2. Karta pomiarowa

Karta RT-DAC (*Real-Time Data Acquisition Board*) [2] to wielofunkcyjna karta cyfrowa do rejestrowania danych i sterowania w systemach czasu rzeczywistego w środowisku Windows. W wersji podstawowej zawiera:

- 92 dwukierunkowe wejścia/wyjścia cyfrowe, w tym 2 kanały współdzielone z wejściem na zewnętrzny sygnał przerwania, 4 kanały współdzielone z wyjściem PWM i 8 kanałów współdzielonych z wejściami enkoderowymi. Programowo można wybrać, czy kanał jest wejściem, czy wyjściem.
- Czterokanałowy blok pomiaru częstotliwości, możliwy jest zarówno pomiar częstotliwości jak i pomiar szerokości impulsu. Rozdzielczość do 25 ns, maksymalna częstotliwość 20 MHz.
- Czterokanałowe wyjście PWM. Rozdzielczość 8 lub 12 bitów, wybierana programowo. Programowalna częstotliwość podstawowa.
- Czterokanałowe wejście enkodera przyrostowego z 32 bitowym układem zliczającym.

Producent dostarcza funkcje API pozwalające na odczyt danych i zapis sygnałów sterujących z poziomu języka C, jak i MEX-pliki pozwalające na dostęp do karty z poziomu pakietu MATLAB/Simulink.

Możliwości wykorzystania karty RT-DAC w systemach sterowania w czasie rzeczywistym dla układów automatyki pojazdowej pokazane zostały w pracy [66].



Rys. 6.8. Czujnik podczas pomiaru.

6.2. Filtracja IMU

6.2.1. Model pomiaru

6.2.1.1. Model pomiaru żyroskopu

Żyroskop zwraca bezpośredni pomiar prędkości obrotowej Ω_k^m w k -tej instancji czasu. Zgodnie z [67] model pomiaru sygnału $\Omega(t)$ przez żyroskopu można przedstawić równaniem (6.2):

$$\Omega_k^m = \Omega_k + b_k + e_k \quad (6.2)$$

gdzie:

- b_k - wolnozmienna wartość przesunięcia od wartości rzeczywistej, w niektórych zastosowaniach może być uznana za stałą,

- e_k - szum gaussowski o zerowej średniej i macierzy kowariancji
- $$\Sigma_e^{gyro} = \begin{bmatrix} \sigma_{gyro,x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{gyro,y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{gyro,z}^2 \end{bmatrix}.$$

Z przyjętego modelu pomiaru widać, iż pomiar kąta za pomocą żyroskopu może być dokładny jedynie na krótkich odcinkach czasu. W dłuższym czasie istniejące zakłócenie b_k o bardzo niskiej częstotliwości powoduje duże błędy.

6.2.1.2. Model pomiaru akcelerometru

Akcelerometr bezpośrednio mierzy wartości przyspieszeń wzdłuż trzech osi. Model pomiaru a_k^m sygnału $a(t)$ może być przedstawiony zgodnie z [67] w postaci (6.3):

$$a_k^m = a_k + v_k \quad (6.3)$$

gdzie:

- v_k - szum gaussowski o zerowej średniej i macierzy kowariancji
- $$\Sigma_v^{acc} = \begin{bmatrix} \sigma_{acc,x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{acc,y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{acc,z}^2 \end{bmatrix}.$$

Kąt wychylenia roweru β_k może zostać wyznaczony za pomocą formuły (6.4).

$$\beta_k = \arctan \frac{-a_k^y}{a_k^z}. \quad (6.4)$$

Osie zgodne są z rysunkiem 6.9.

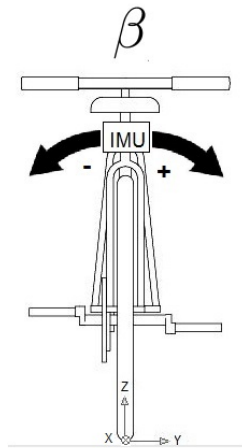
Można zauważyć, że w przeciwieństwie do żyroskopu akcelerometr może dawać dokładniejsze pomiary kąta w dłuższym odcinku czasu, natomiast wysokoczęstotliwościowe zakłócenia powodują większe błędy na krótkim odcinku czasu.

6.2.2. Filtracja

6.2.2.1. Filtr komplementarny

Filtr komplementarny jest oparty na różnych charakterystykach akcelerometru i żyroskopu, dotyczących ich dokładności na krótkich i długich odcinkach czasu. Dlatego sygnał z każdego sensora przetwarzany jest odmiennie.

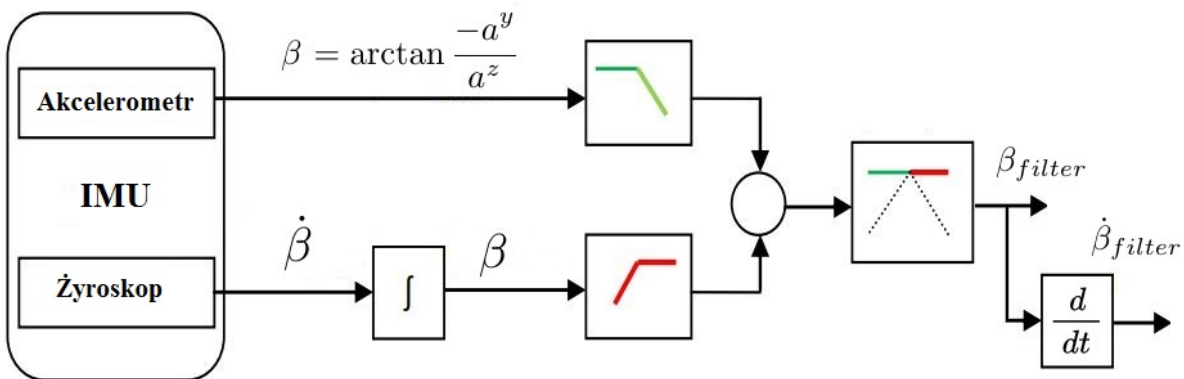
- Prędkość kątowna mierzona żyroskopem jest całkowana i filtrowana filtrem górnoprzepustowym (6.6).



Rys. 6.9. Schemat montażu czujnika IMU.

- Z przyspieszeń zmierzonych akcelerometrem wyznaczany jest kąt zgodnie z równaniem (6.4). Następnie wyznaczony kąt filtruje się filtrem dolnoprzepustowym (6.6).

Wyjścia z obydwu torów przetwarzania fuzowane są do jednej wartości pozycji β_{filter} . Prędkość kątowna $\dot{\beta}_{filter}$ uzyskiwana jest przez różniczkowanie filtrowanej pozycji. Schemat blokowy filtru komplementarnego przedstawiony jest na rysunku 6.10.



Rys. 6.10. Schemat blokowy filtru komplementarnego.

Ważnym faktem jest, że suma transmitancji obydwu filtrów równa jest jedności (6.5):

$$G_{HPF}(s) + G_{LPF}(s) = 1. \quad (6.5)$$

Natomiast obydwa filtry są filtry pierwszego rzędu:

$$G_{HPF}(s) = \frac{\tau s}{\tau s + 1}, \quad G_{LPF}(s) = \frac{1}{\tau s + 1}. \quad (6.6)$$

6.2.2.2. Filtr Kalmana

Z powodu obecności przesunięcia w pomiarze żyroskopu, aby otrzymać poprawne wyniki, nie można użyć podstawowej wersji filtru Kalmana, lecz musi zostać użyta jego modyfikacja, tak zwany *Biased*

Kalman Filter (BKF). Takie oraz podobne podejścia do kompensacji przesunięcia o wartość stałą w pomiarze mogą zostać odnalezione na przykład w pracach: [31], [57] i [117].

Model procesu

Dla rozważanego problemu można założyć model ruchu, w którym rower wychyla się ze stałą prędkością (ang. *Constant Velocity Model - CV*). Wówczas równania modelu przyjmują postać (6.7):

$$\dot{\gamma} = D_k \gamma_k + \nu_k \quad (6.7)$$

gdzie:

$$- \gamma = \begin{bmatrix} \beta \\ \dot{\beta} \end{bmatrix},$$

- β - kąt wychylenia roweru, $\dot{\beta}$ - prędkość wychylania roweru,

$$- D_k = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

- T_s - okres próbowania,

- $E[\nu_k] = 0$ i $E[\nu_k^T \nu_l] = Q_k \delta_{kl}$,

- δ_{kl} - delta Diraca.

Model pomiaru

Model pomiaru (6.8) uwzględnia obecność przesunięcia pomiaru z równania (6.2):

$$y_k = H_k x_k + G_k b_k + \eta_k \quad (6.8)$$

gdzie:

$$- H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$- G_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

- η_k - gaussowski szum pomiaru,

- $E[\eta_k] = 0$ i $E[\eta_k^T \eta_l] = R_k \delta_{kl}$,

- δ_{kl} - delta Diraca.

Rozszerzony model procesu

W rozważanym przypadku wolnozmiennie przesunięcie pomiaru może zostać zamodelowane za pomocą równania (6.9):

$$b_{k+1} = B_k b_k + \xi_k \quad (6.9)$$

gdzie:

- $B_k = 1$,
- $E[\xi_k] = 0$ i $E[\xi_k^T \xi_l] = T_k \delta_{kl}$.

Nowo zdefiniowany stan b może zostać dodany do poprzednio zdefiniowanego γ , tworząc nowy stan z zdefiniowany przez (6.10):

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ b_k \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Równania stanu nowego modelu mają postać (6.11):

$$z_{k+1} = F_k z_k + \zeta_k \quad (6.11)$$

gdzie:

- $F_k = \begin{bmatrix} D_k & 0 \\ 0 & B_k \end{bmatrix}$,
- $\zeta_k = \begin{bmatrix} \nu_k \\ \eta_k \end{bmatrix}$ - nowy szum procesu,
- $E[\xi_k] = 0$ and $E[\xi_k^T \xi_l] = W_k \delta_{kl}$,
- $W_k = \begin{bmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & T_k \end{bmatrix}$.

Równanie pomiaru w nowym modelu może być zdefiniowane jako:

$$y_k = L_k z_k + \eta_k \quad (6.12)$$

gdzie:

- $L_k = \begin{bmatrix} H_k & G_k \end{bmatrix}$.

Biased Kalman Filter

Dla nowego modelu procesu zdefiniowanego przez (6.11) i nowego pomiaru (6.12) można użyć podstawowej wersji filtru Kalmana. Składa się on z dwóch kroków: predykcji i korekcji.

Predykcja:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{z}_{k|k-1} = F_k \hat{z}_{k-1} \\ P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q_k^z \end{array} \right\} \quad (6.13)$$

Korekcja:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_k = y_k - L_k \hat{x}_{k|k-1} \\ S_k = R_k + L_k P_{k|k-1} L_k^T \\ K_k = P_{k|k-1} H_k^T S_k^{-1} \\ \hat{z}_{k|k} = \hat{z}_{k|k-1} + K_k s_k \\ P_{k|k} = (I - K_k L_k) P_{k|k-1} (I - K_k L_k)^T + K_k R_k K_k^T \end{array} \right. \quad (6.14)$$

6.2.2.3. Porównanie

W celu dokonania porównania pomiędzy filtrem komplementarnym a filtrem Kalmana wyznaczono charakterystyki Bodego dla każdego z nich. Zostały one przedstawione na rysunkach 6.11 - dla filtru położenia i 6.12 - dla filtru prędkości. Dodatkowo na rysunku 6.13 przedstawiono wykresy stosunku sygnału do szumu (ang. *Single to Noise Ratio* - SNR) dla obydwu filtrów oraz samego pomiaru.

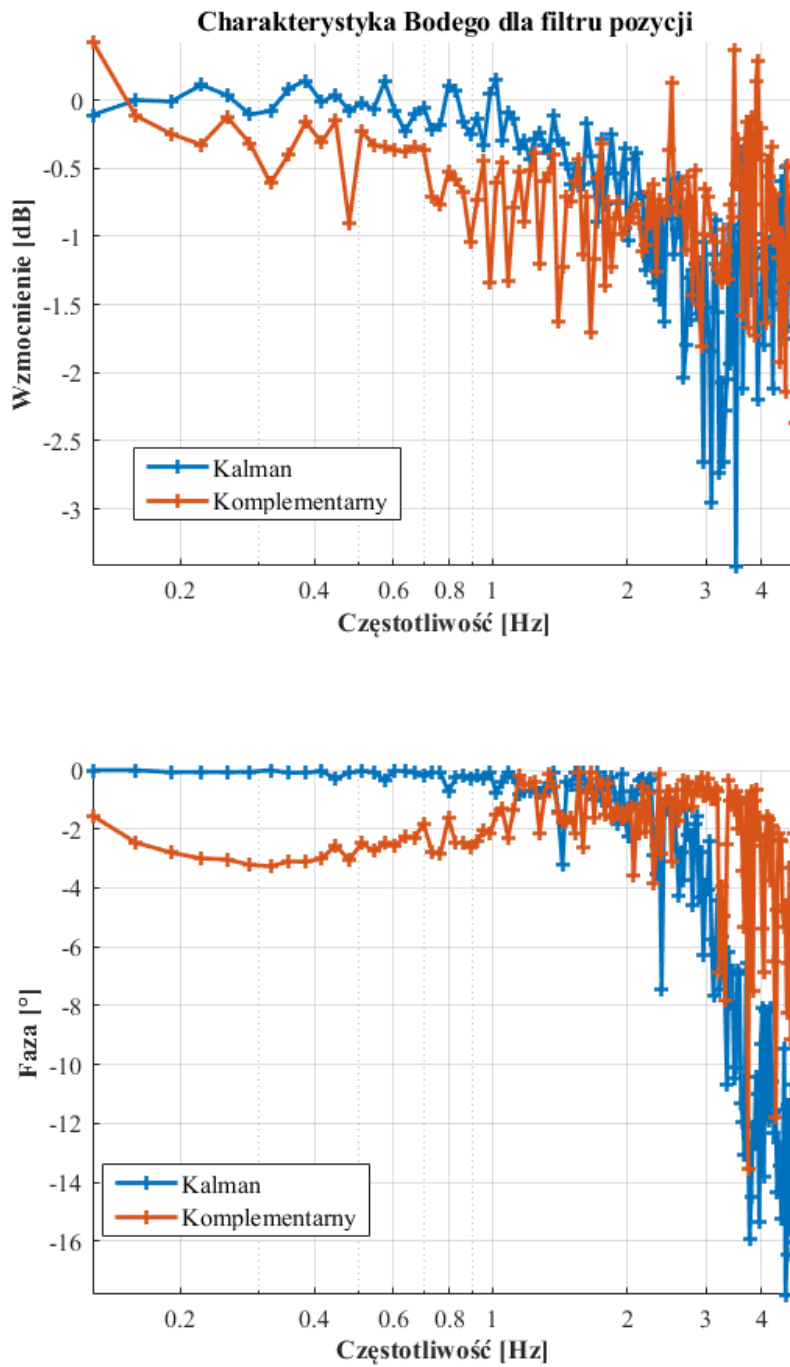
Położenie

Analizując charakterystykę Bodego dla filtru położenia można zauważyć, że filtr Kalmana dla częstotliwości do około 1 Hz ma wzmocnienie oscylujące wokół 0, natomiast powyżej tej częstotliwości spada z prędkością około $3 \frac{dB}{dek}$. Podobne właściwości wykazuje charakterystyka przesunięcia fazowego. Warto zauważyć, iż charakterystyka filtru komplementarnego znajduje się poniżej charakterystyki filtru Kalmana dla niskich częstotliwości, dla wyższych jest na odwrót. Jednak w przypadku wyższych częstotliwości pomiar jest mocno zaszumiony. Analogiczną właściwość widać na wykresie wartości SNR. Ponadto, warto zaznaczyć, że SNR dla filtru Kalmana zmniejsza się konsekwentnie ze wzrostem częstotliwości, podczas gdy dla filtru komplementarnego wartość ta pozostaje praktycznie stała powyżej 2 Hz.

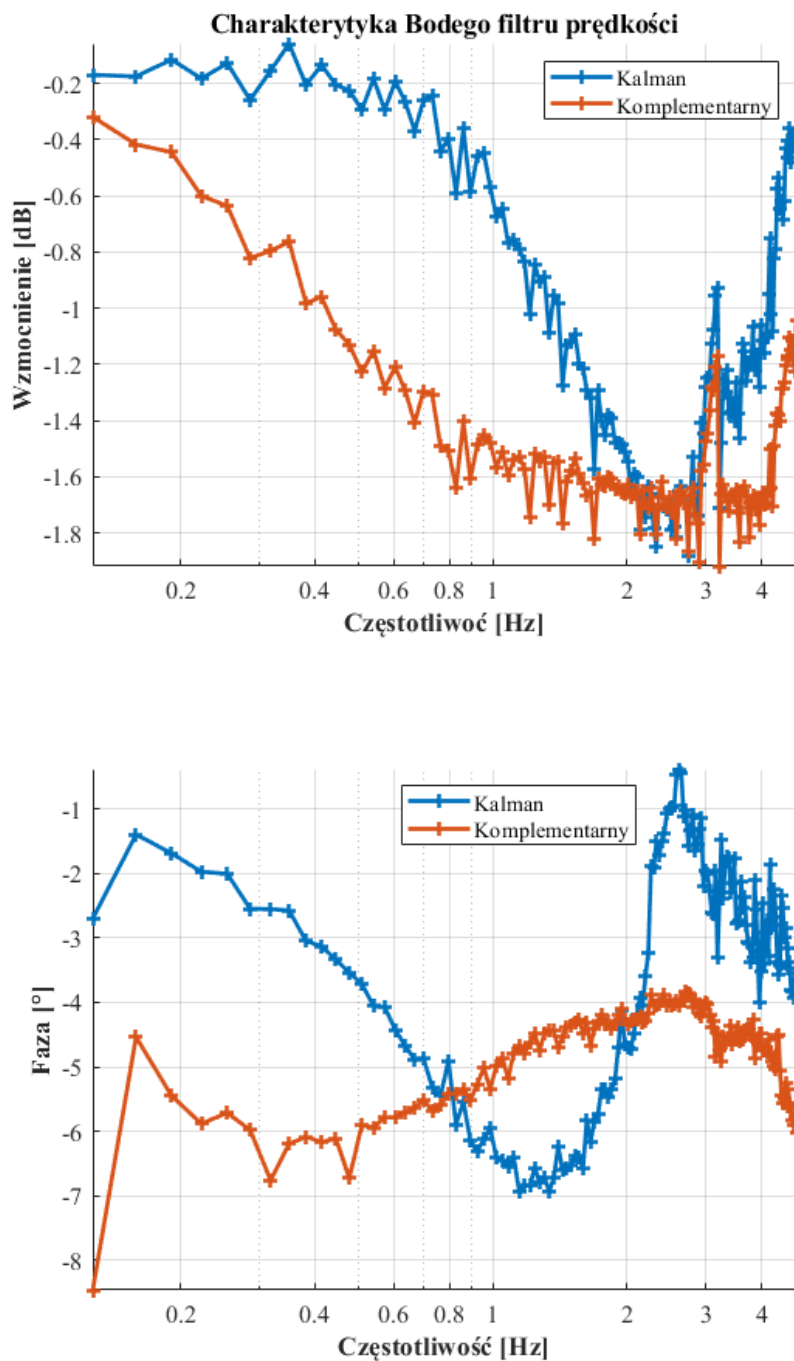
Prędkość

Podobnie jak dla charakterystyki położenia dla niskich częstotliwości, charakterystyka wzmocnienia filtru Kalmana wynosi około 0 i zmniejsza się wraz ze wzrostem częstotliwości aż do około 2.5 Hz, po czym wzrasta. Podobne zachowanie można zauważyć dla charakterystyki wzmocnienia filtru komplementarnego, jednak dla całego zakresu badanych częstotliwości znajduje się ona poniżej charakterystyki filtru Kalmana. Również charakterystyka fazowa przejawia zbliżoną właściwość. Podobnie jak w przypadku charakterystyki wzmocnienia, wykres SNR opada do częstotliwości 2 Hz, po czym wzrasta. W najniższym punkcie osiąga wartość bezpośredniego pomiaru. Dla filtru komplementarnego wartość ta praktycznie sukcesywnie spada i w dużej części zakresu częstotliwości znajduje się poniżej wartości bezpośredniego pomiaru prędkości. Jest to najprawdopodobniej spowodowane występującym tutaj różniczkowaniem numerycznym.

Na podstawie wykonanych charakterystyk testowanych filtrów i wykonanych symulacji, które wskazują, że w punkcie pracy częstotliwości występujące w układzie nie powinny przekraczać 2 Hz, do realizacji wybrany został filtr Kalmana.



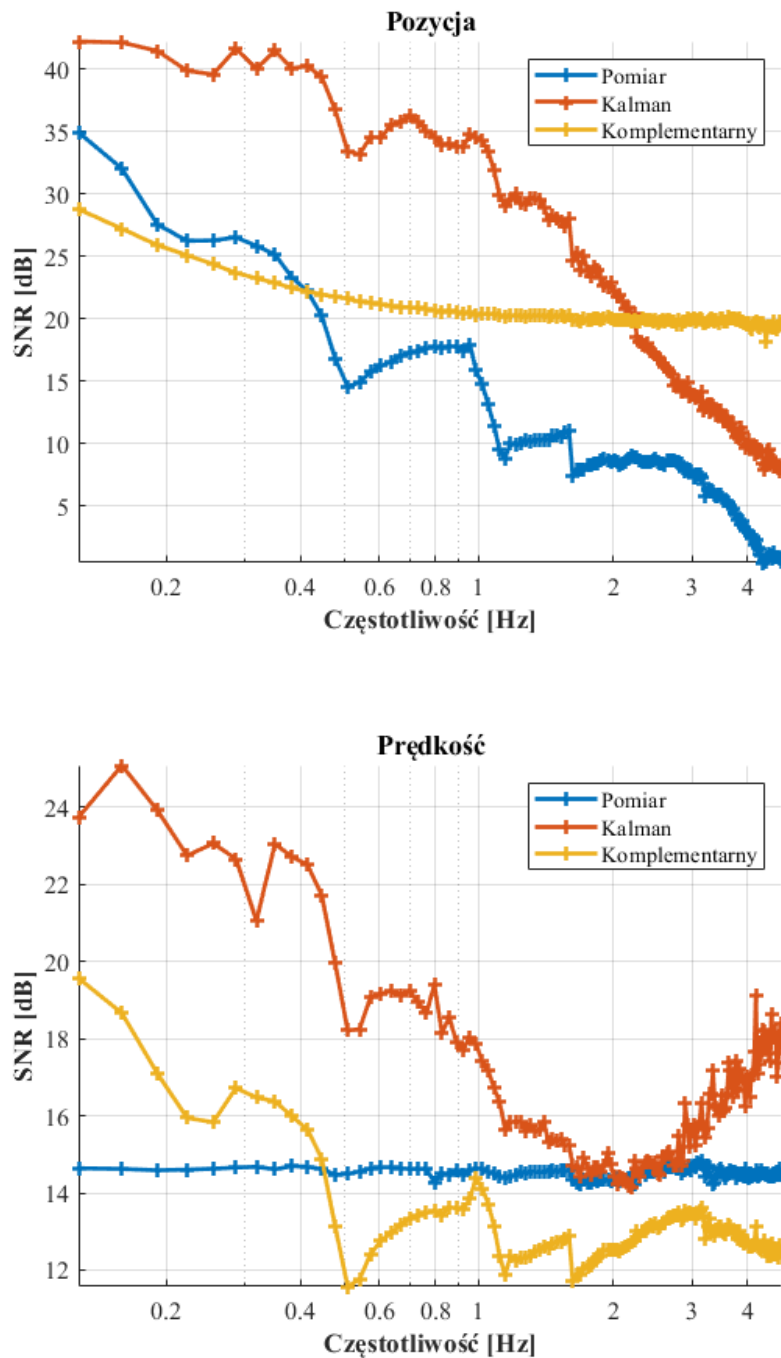
Rys. 6.11. Porównanie charakterystyk Bodego dla filtru pozycji.



Rys. 6.12. Porównanie charakterystyk Bodego dla filtru prędkości.

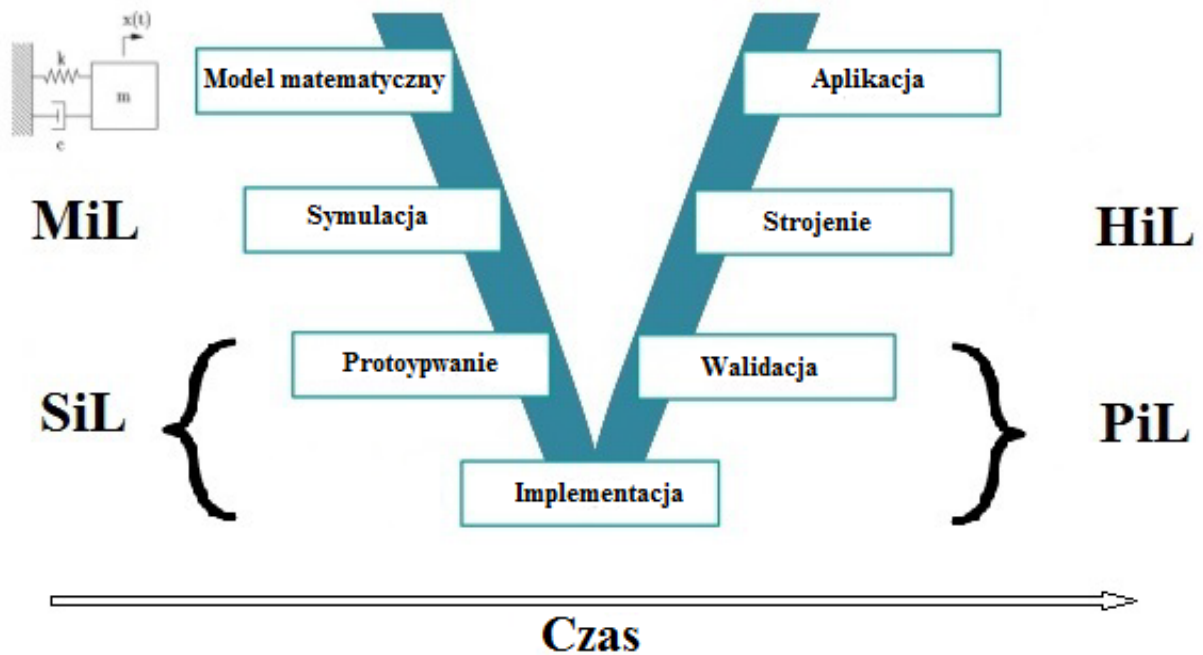
6.3. Podejścia testowe

Wśród współczesnych metod wytwarzania oprogramowania tak zwany model-V może być rozważany jako rozszerzenie modelu kaskadowego. Prezentuje on relacje pomiędzy każdym etapem cyklu



Rys. 6.13. Porównanie stosunku sygnału do szumu (SNR).

rozwoju oprogramowania/produktu a powiązaną z nim fazą testów. Rysunek 6.14 przedstawia schematyczny obraz modelu-V. W pionie oznaczone zostały poszczególne fazy rozwoju/poziom abstrakcji (od góry w dół poziom abstrakcji zmniejsza się), natomiast oś pozioma reprezentuje czas trwania projektu.



Rys. 6.14. Schemat V-modelu procesu rozwoju projektu w metodologii *Model Based Design*.

Na rysunku 6.14 zaznaczone zostały również poziomy testów dla różnych poziomów abstrakcji. Są to etapy: Model in the Loop (MiL), Software in the Loop (SiL), Processor in the Loop (PiL), Hardware in the Loop (HiL). Każdy z tych etapów zostanie opisany krótko w rozdziałach 6.3.1 - 6.3.4. Więcej informacji na temat metodyki Model-Based-Design (MBD) można znaleźć na przykład w pracy [50] lub [81].

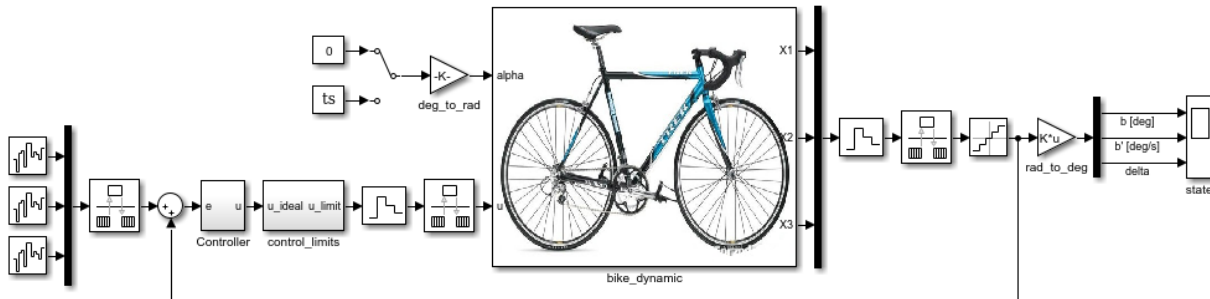
6.3.1. Metoda typu „Model in the Loop”

Jest to pierwszy etap testowania projektowanego kontrolera. Na tym etapie model obiektu sterowania jak i model projektowanego regulatora, implementowane są w języku wysokiego poziomu - najczęściej są to języki graficzne, takie jak Simulink lub Modelica. Jednak każdy z elementów systemu może zostać wykonany w innej technologii (przez różne zespoły) i komunikować się ze sobą poprzez wyspecjalizowane interfejsy, takie jak Functional Mockup Interface (FMI) [4]. Na tym etapie poprawność projektowanego regulatora może zostać zweryfikowana bez szczegółów implementacyjnych.

W ramach pracy wykonano model symulacyjny w pakiecie MATLAB/Simulink zaprezentowany na rysunku 6.15.

W ramach testów regulatora zdefiniowano dwa scenariusze testowe (wykorzystywane również w testach SiL i PiL):

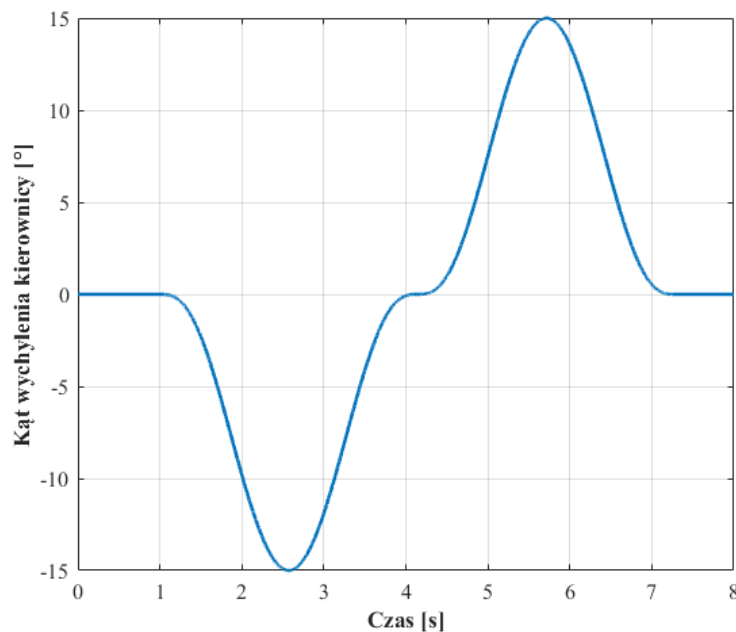
Test I – w tym teście regulator musi sprowadzić rower bez prędkości postępowej ze stanu początkowego $x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ do punktu równowagi x^{eq} .



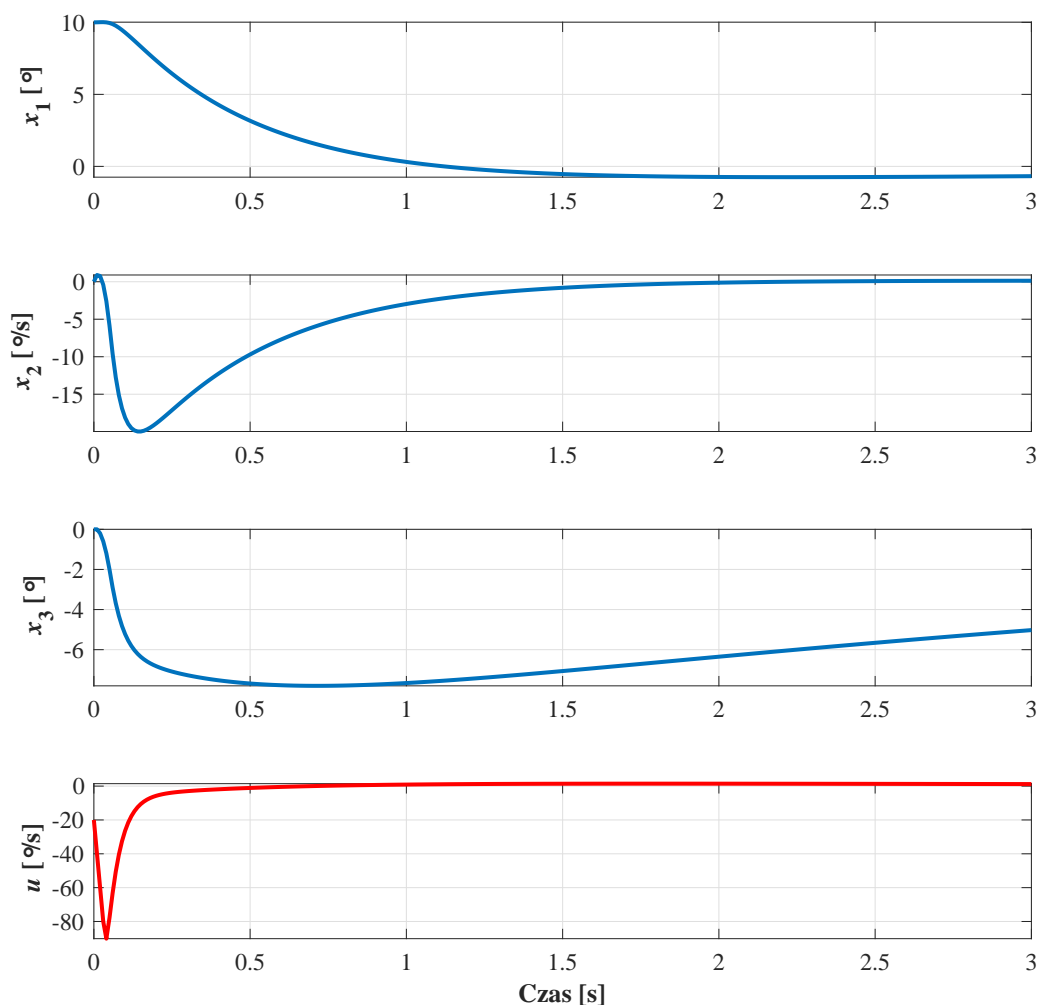
Rys. 6.15. Model symulacyjny wykonany w pakiecie MATLAB/Simulink.

Test II – w tym teście rower porusza się z prędkością v i warunkiem początkowym $x^0 = x^{eq}$. Regulator musi zachować stabilność przy działającym zakłóceniu na skutek ruchu kierownicą przedstawionego na rysunku 6.16. Są to dwa szybkie ruchy kierownicą wychylające ją najpierw w lewą, a następnie w prawą stronę, ostatecznie wracając do pozycji zerowej.

Wyniki symulacji przedstawione są na rysunkach 6.17 i 6.18.



Rys. 6.16. Kąt wychylenia kierownicy w teście II.

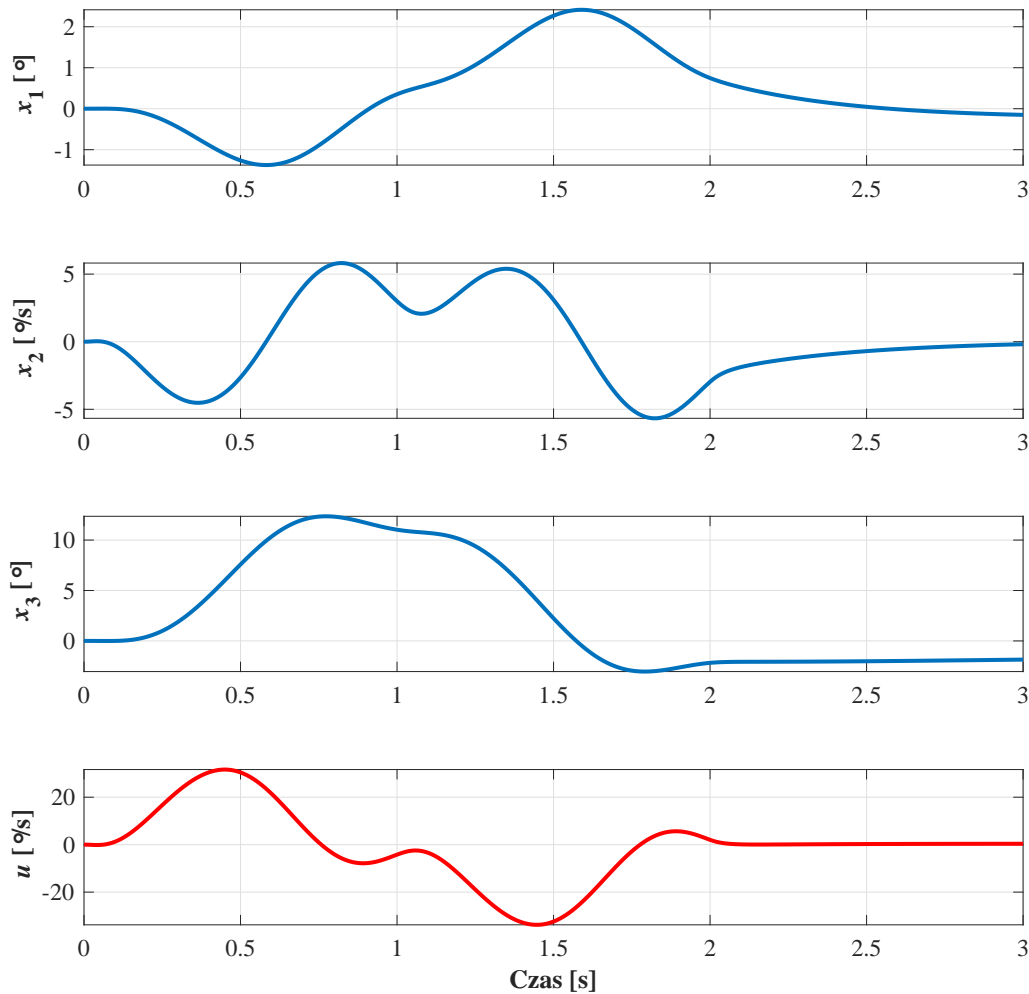


Rys. 6.17. Wyniki symulacji MiL dla testu I.

6.3.2. Metoda typu „Software in the Loop”

Po pozytywnej weryfikacji regulatora, kolejnym etapem jest implementacja regulatora w docelowym języku programowania. Implementacja ta jest bardziej szczegółowa, lecz w dalszym ciągu jest ona niezależna od platformy sprzętowej i uruchamiana na komputerze klasy PC poprzez odpowiednie środowisko uruchomieniowe zapewniające identyczną komunikację z modelem obiektu jak w testach MiL.

Schemat realizacji testów SiL przedstawiono na rysunku 6.19. W trakcie testów uzyskano wyniki identyczne jak w testach MiL.



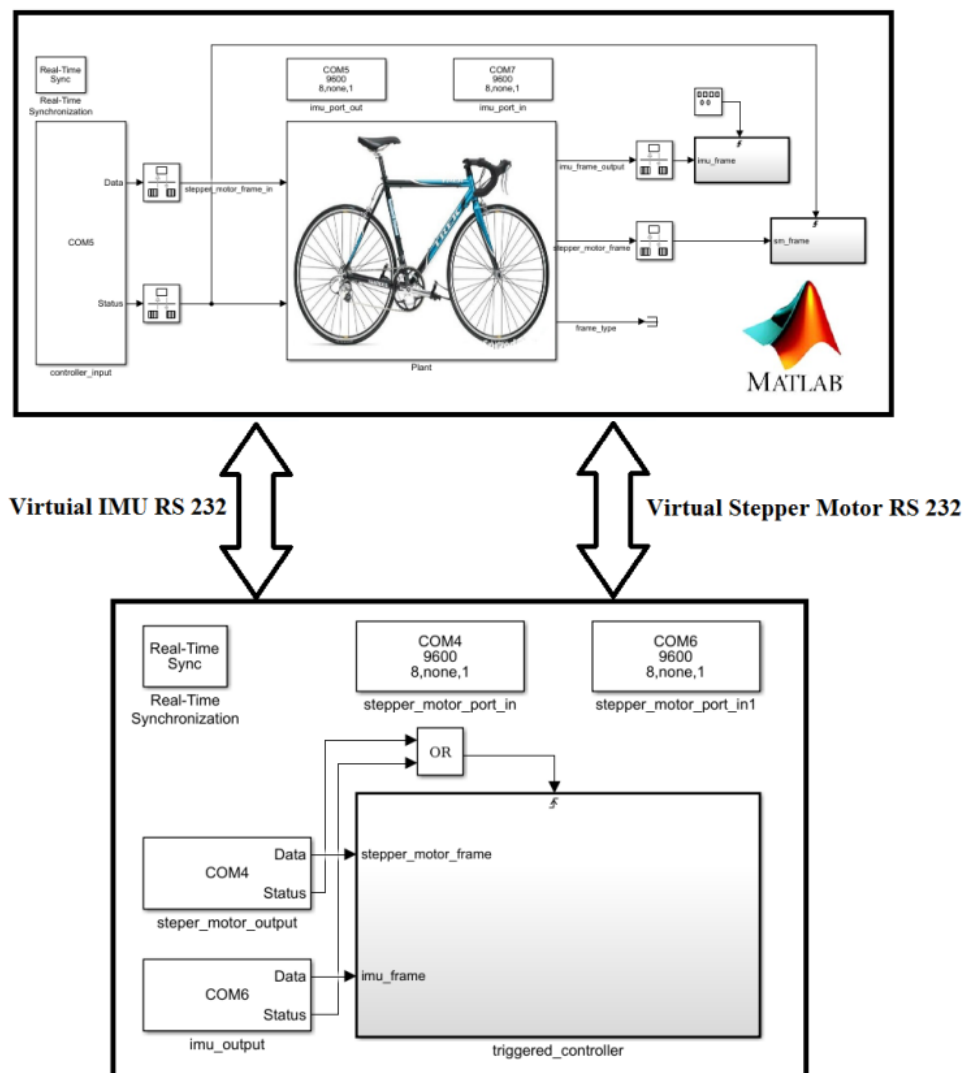
Rys. 6.18. Wyniki symulacji MiL dla testu II.

6.3.3. Metoda typu „Processor in the Loop”

Ten etap obejmuje już test części programowej i sprzętowej. Po weryfikacji logiki regulatora kolejnym etapem jest uruchamianie przygotowanej implementacji na docelowej platformie sprzętowej, która połączona jest przez docelowy interfejs z komputerem klasy PC, na którym symulowany jest obiekt sterowania. Jednak zachowanie reżimu czasu rzeczywistego nie jest wymagane. Na tym etapie testów, poza logiką regulatora, testowane są też takie elementy jak diagnostyka, interfejsy, itp.

Schemat realizacji testów PiL przedstawiono na rysunku 6.20.

W trakcie realizacji pracy wykonano porównanie wyników testów SiL i PiL dla obu przypadków testowych. Jak widać, istnieją niewielkie różnice między uzyskanymi wynikami, które są spowodowane występującym jitterem na interfejsie komunikacyjnym. Histogram jitteru przedstawiono na rysunku 6.23.



Rys. 6.19. Schemat realizacji testów typu SiL [96].

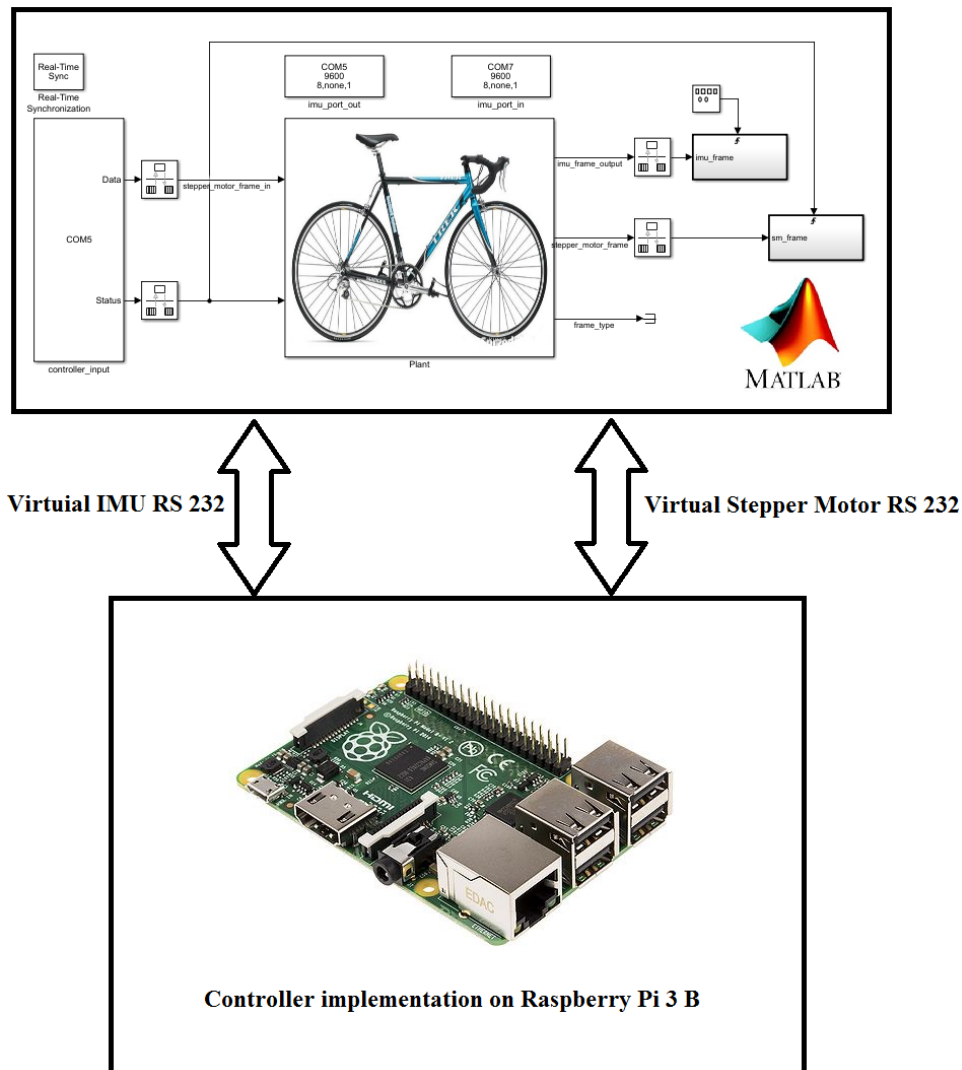
6.3.4. Metoda typu „Hardware in the Loop”

Testy HiL obejmują testy na rzeczywistym obiekcie. Szczegółowe ich wyniki zostaną przedstawione w rozdziale 6.4.

6.4. Wyniki badań eksperymentalnych

6.4.1. Filtracja w układzie rzeczywistym

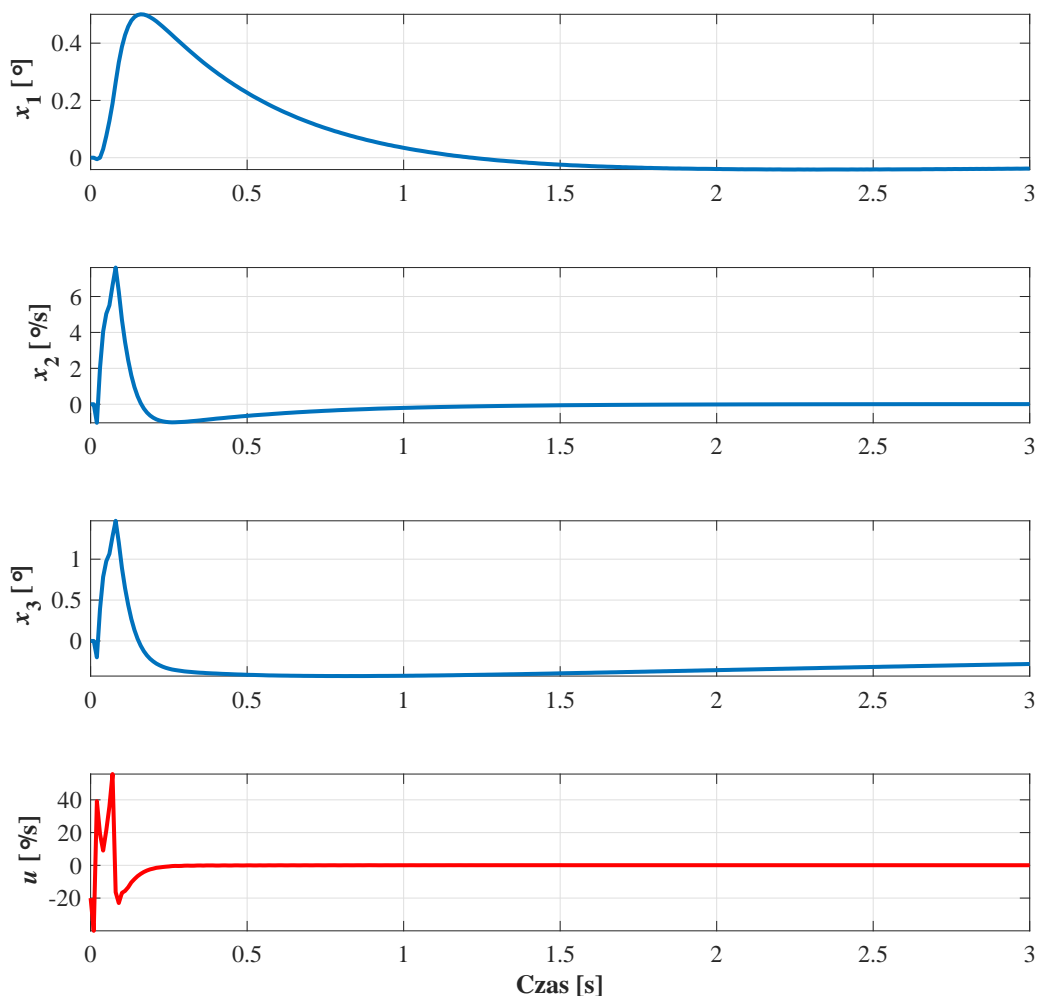
W przypadku rzeczywistego modelu laboratoryjnego silnik **BLDC** wprowadza do układu duże drgania, które poprzez ramę roweru propagują się na czujnik **IMU**. Na wykresach 6.24 i 6.25 przedstawione zostały bezpośrednie pomiary z żyroskopu i akcelerometru. Na ich podstawie widać, jak duże szumy zostają przeniesione na czujnik.



Rys. 6.20. Konfiguracja sprzętowo-programowa dla testu typu PiL [96].

Na wykresach 6.26 i 6.27 przedstawiono rozkład częstotliwości występujących w pomiarze z czujników. Na ich podstawie można zauważyć występowanie stosunkowo dużych drgań w przedziale częstotliwości między 20 Hz a 30 Hz. Ponieważ, jak zaznaczono w rozdziale 6.2.2.3, filtr Kalmana dostosowany został do częstotliwości drgań bez uwzględniania częstotliwości wprowadzanych przez silnik **BLDC**, musiano wprowadzić dodatkowo filtr dolnoprzepustowy pracujący bezpośrednio na pomiarach czujników. Jako częstotliwość graniczną filtra wybrano 5 Hz.

Na rysunku 6.28 przedstawiono rezultaty filtracji z zastosowaniem filtrów dolnoprzepustowych, do usunięcia wysokoczęstotliwościowych szumów, oraz filtru Kalmana dla modelu eksperymentalnego z uruchomionym silnikiem **BLDC** przy ręcznym wychylaniu rowerka od pionu. Z wykresu tego zauważyć można, że filtr daje w rezultacie dobre wartości, lecz wprowadza opóźnienie rzędu około 0.08 s. Jest to zbyt duże opóźnienie dla układu regulacji i powoduje ono destabilizację układu. Ponieważ pomiar z enkodera, mierzącego pozycję koła zamachowego, jak i estymacja prędkości wychylania ramy roweru,

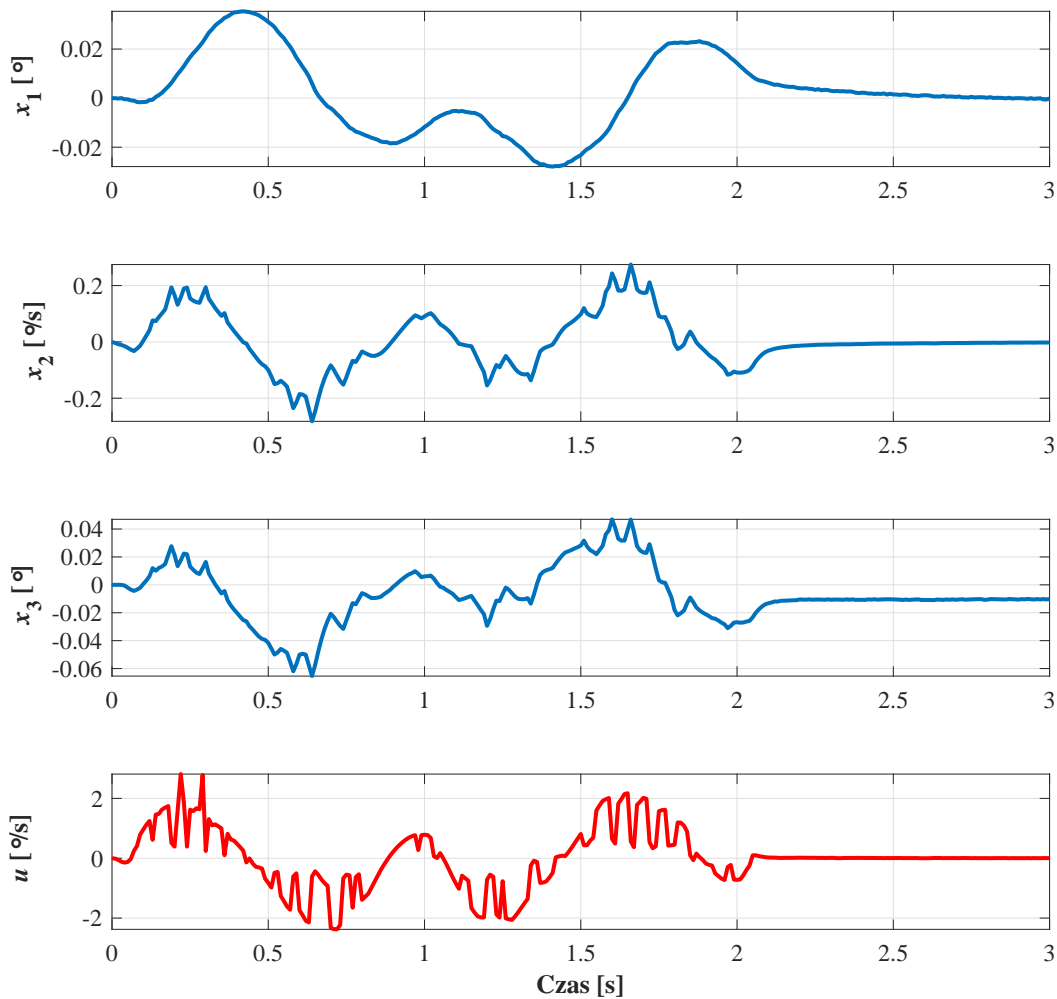


Rys. 6.21. Porównanie wyników testów MiL i PiL dla testu I.

mają różne opóźnienia, niemożliwe jest zastosowanie predyktora Smitha, który wymaga, aby opóźnienia były jednakowe. Inne metody kompensacji opóźnień nie były rozważane. Dlatego zdecydowano się na jedynie stacjonarny scenariusz i pomiar wychylenia jednoślada za pomocą czujnika laserowego.

6.4.2. Wyniki eksperymentalne

W tym rozdziale przedstawione zostały rezultaty badań eksperymentalnych dla wszystkich algorytmów opisanych w rozdziale 5 zrealizowanych na laboratoryjnym modelu badawczym. Z racji ograniczeń modelu laboratoryjnego wykonane zostały eksperymenty tylko dla pierwszego ze scenariuszy testowych - czyli dla stacjonarnego roweru ze stanem początkowym $x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.



Rys. 6.22. Porównanie wyników testów MiL i PiL dla testu II.

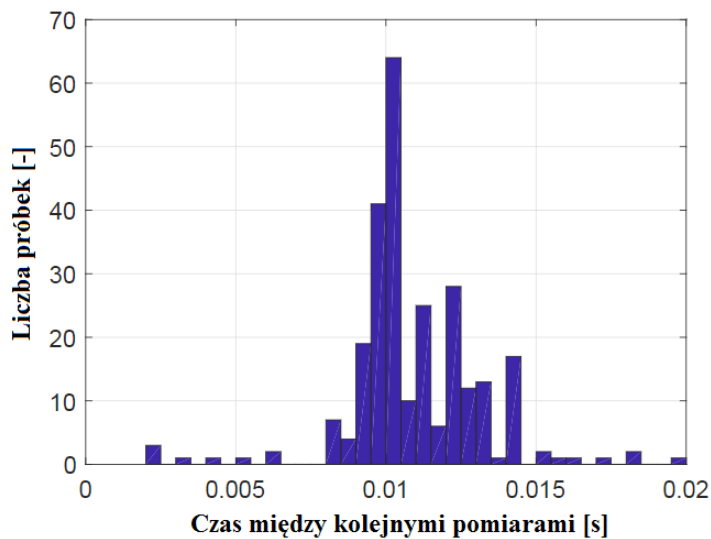
Dla każdego z badanych algorytmów wykonano kilka eksperymentów. Miały one za zadanie sprawdzić jakość pracy algorytmów przy różnych nastawach i parametrach projektowych. Ponadto dla wybranych nastaw regulatorów wykonano test z dodatkowym obciążeniem

$$\Delta m_{fr} = 1kg$$

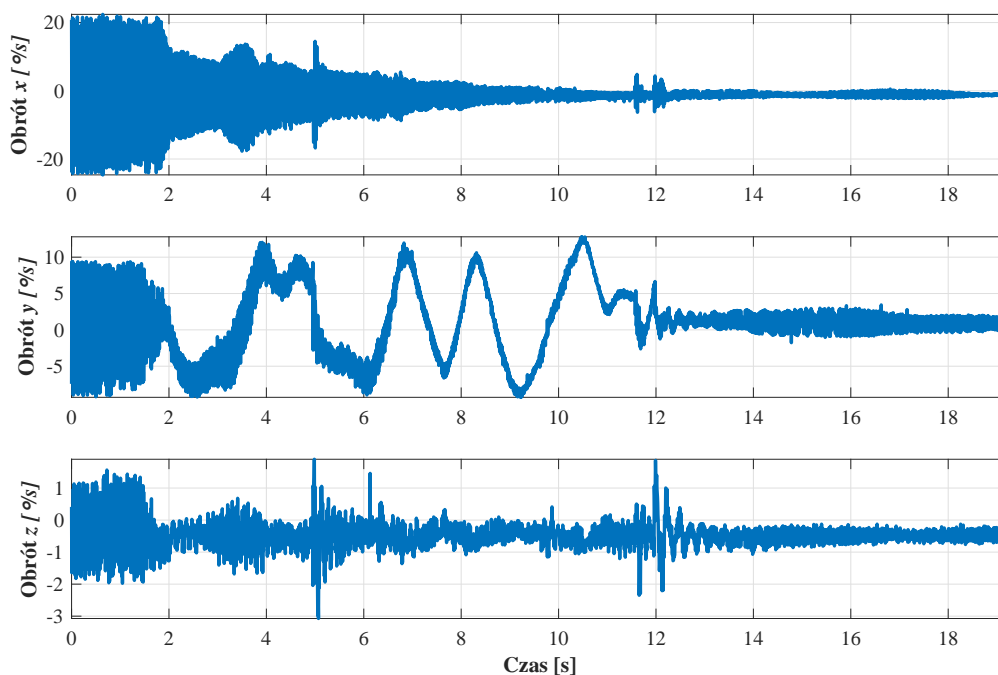
w celu weryfikacji odporności regulatora na zmiany parametrów obiektu.

Na ilustracjach 6.29 i 6.30 przedstawiono widok na model laboratoryjny w trakcie stabilizacji.

W dodatkach C, D i E zaprezentowane zostały wyniki odpowiednio regulatora PD_{cos} , regulatora z linearyzującym sprzężeniem zwrotnym i regulatora **NDOBRC** przy obecności zewnętrznych zakłóceń zrealizowanych jako ręczne wytrącanie z punktu równowagi roweru - zatem niepowtarzalne i nie będzie uwzględniane w ocenie regulatora.



Rys. 6.23. Histogram czasów między kolejnymi pomiarami w teście typu PiL.

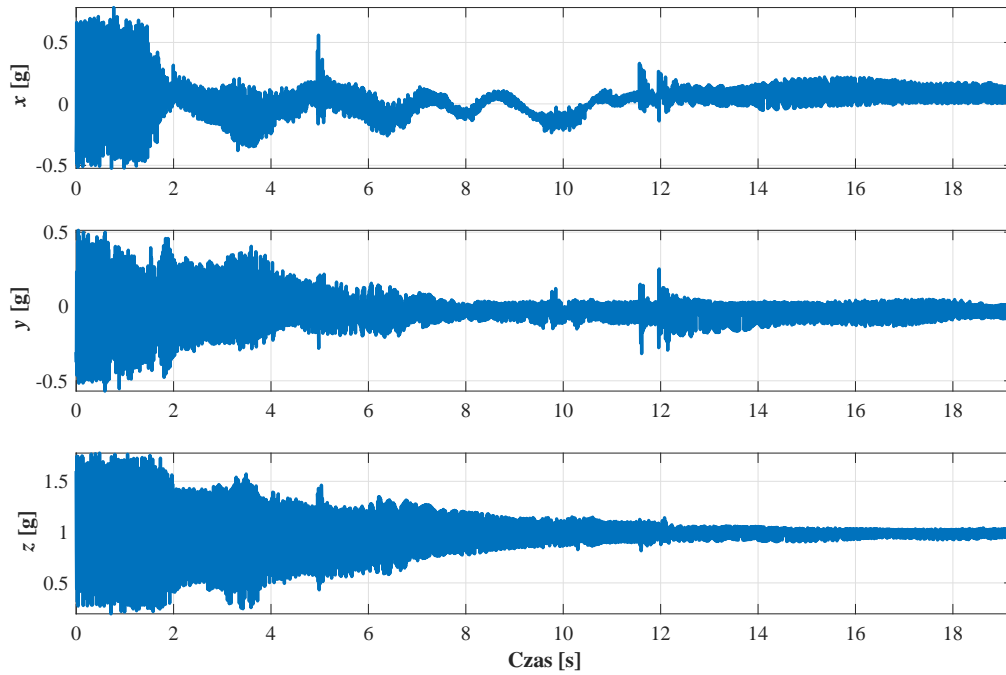


Rys. 6.24. Pomiar żyroskopem.

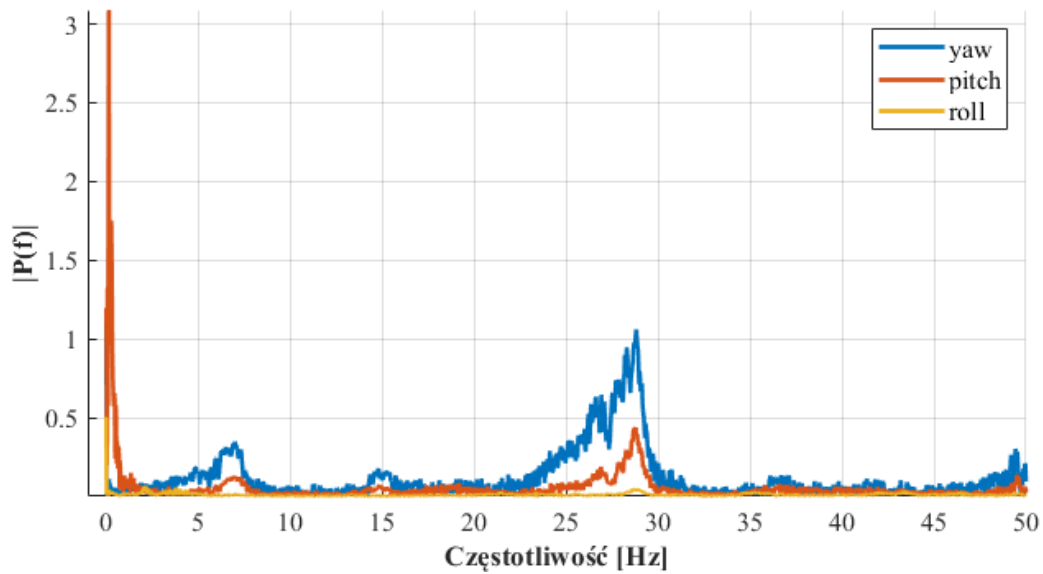
6.4.2.1. Regulator PD_{cos}

Pierwszym przetestowanym regulatorem był regulator PD_{cos} zaimplementowany zgodnie z punktem (5.2.1.2). Przetestowane zostało kilka zestawów parametrów:

- $K_P = 30$, $K_D = 1$ i $K = 0.25$,
- $K_P = 30$, $K_D = 1$ i $K = 0.5$,

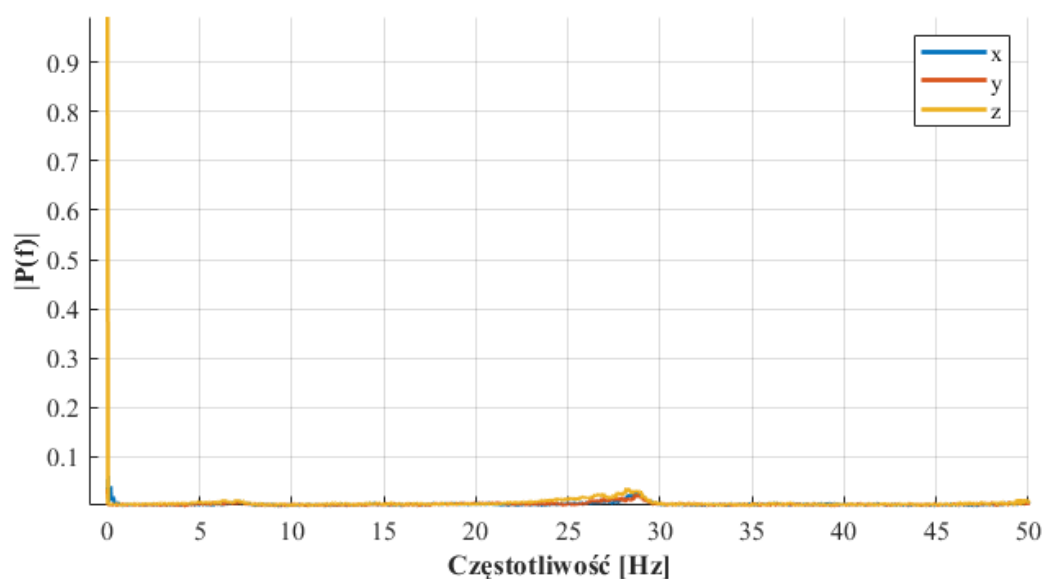


Rys. 6.25. Pomiar akcelerometrem.

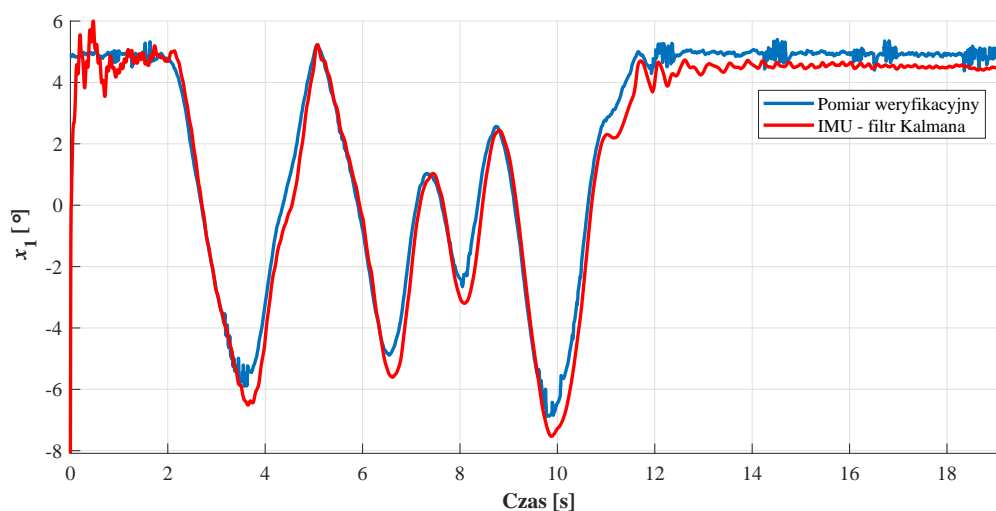


Rys. 6.26. Żyroskop FFT.

- $K_P = 30, K_D = 3$ i $K = 0.5$,
- $K_P = 30, K_D = 4$ i $K = 0.5$,
- $K_P = 30, K_D = 4.5$ i $K = 0.5$.



Rys. 6.27. Akcelerometr FFT.



Rys. 6.28. Pomiar weryfikacyjny wychYLENIA jednoślądu.

Jak widać na rysunku 6.31, zgodnie z przewidywaniami, największe oscylacje występują dla nastaw gdzie $K_D = 1$, ponieważ parametr K_D jest proporcjonalny do współczynnika tłumienia. Jednak dla przypadku z mniejszym sprzężeniem od zmiennej stanu x_3 , zauważyć można znacznie wolniejsze zbieganie do pozycji równowagi **CMG**, również zgodnie z założeniami.

Dla wyższych wartości parametru $K_D = 3$ i $K_D = 4$ oscylacje są znacznie bardziej wytłumione. Również pozycja **CMG** stosunkowo szybko zmierza do pozycji równowagi. Natomiast dla przypadku, gdy $K_D = 4.5$, przebieg jest praktycznie aperiodyczny.

Na rysunku 6.32 pokazano porównanie pomiędzy przebiegami wykonanymi na obiekcie nominalnym oraz na obiekcie z dodatkowym obciążeniem $\Delta m_{fr} = 1kg$. Na podstawie wykonanych pomiarów



Rys. 6.29. Rower w trybie stabilizacji - widok z tyłu.

można zauważyć, że mimo zmian parametrów obiektu, dalej układ sprowadzany jest do punktu równowagi. Jednak zmienna stanu x_1 w przypadku obciążonego układu ma wyraźne, choć niewielkie oscylacje, podczas gdy układ nominalny jest aperiodyczny. Jest to zachowanie zgodne z przewidywaniami, natomiast lekko niespodziewana jest lepsza zbieżność do położenia równowagi zmiennej stanu x_3 .

W zarejestrowanych przebiegach zauważyć można skok na przebiegu zmiennej x_3 z obciążeniem między 2 a 3 sekundą - podobne skoki występują w rezultatach dla innych regulatorów. Nie udało się zidentyfikować przyczyny takich skoków, lecz wartym zaznaczenia jest fakt, iż mimo tego regulator z powodzeniem sprowadza układ do punktu równowagi.

6.4.2.2. Regulator liniowo-kwadratowy

Kolejnym testowanym regulatorem był regulator liniowo-kwadratowy. Został on zrealizowany zgodnie z proponowaną modyfikacją w równaniu (5.16).

Ponieważ zasadniczo regulator ten ma taką samą strukturę jak PD_{cos} , przeprowadzono tylko jeden eksperyment dla wskaźnika jakości zdefiniowanego przez macierze:



Rys. 6.30. Rower w trybie stabilizacji - widok z boku.

$$- Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$- R = 0.1.$$

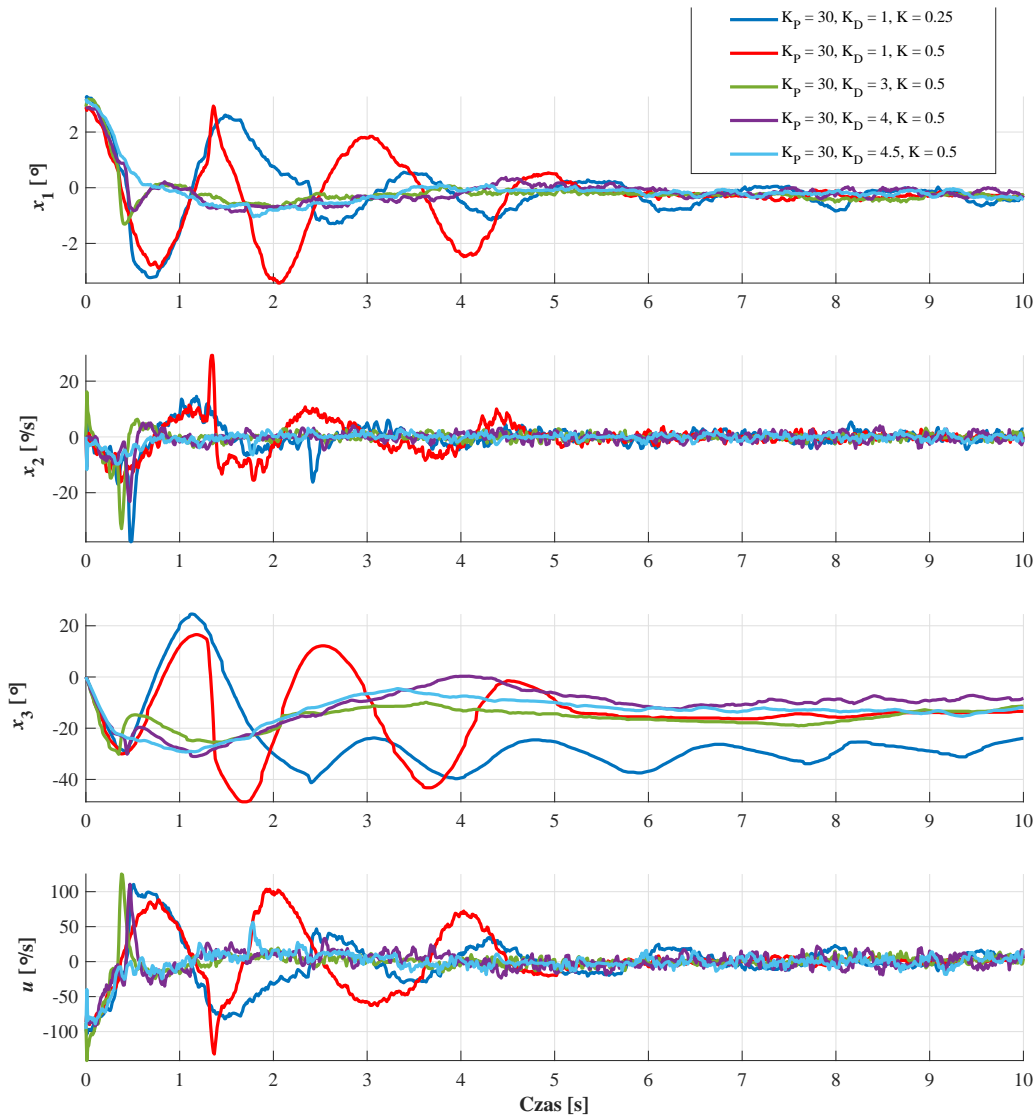
Osiągnięto w ten sposób niemal aperiodyczny przebieg zmiennej stanu x_1 . Ponadto kąt obrotu **CMG** szybko zbliża się do wartości zerowej i już w jej pobliżu pozostaje. Przebiegi te przedstawione są na rysunku 6.33.

Niestety, w przypadku tak określonego regulatora nie było możliwe ustabilizowanie roweru w obecności dodatkowego obciążenia.

6.4.2.3. Regulator H_∞

Dla regulatora H_∞ z modyfikacją na stabilizację kąta wychylenia **CMG** przetestowano dwa zestawy parametrów. Rezultaty widoczne są na rysunku 6.34. Dla $K_{yaw} = 0.5$ uzyskano niemal aperiodyczny przebieg zmiennej x_1 , natomiast w przypadku z $K_{yaw} = 1$ występuje jedno przeregulowanie (drugie widoczne na wykresie spowodowane jest zakłóceniem na x_3). Można zauważyć również, że dla $K_{yaw} = 1$ kąt precesji **CMG** zbiega do punktu równowagi znacznie szybciej. Warto zaznaczyć, iż w porównaniu z poprzednimi regulatorami metoda H_∞ wyznacza wyższe wartości sterowania, przez pewien czas osiąga nawet limit prędkości precesji.

Porównanie między układem obciążonym a nieobciążonym przedstawiono na rysunku 6.35. Widać, że nie ma znaczących różnic między obydwooma przebiegami, nie licząc różnic po 5 sekundzie, spowodowanych najprawdopodobniej wystąpieniem pewnego zakłócenia.



Rys. 6.31. Porównanie działania regulatora PD_{cos} dla różnych zestawów parametrów.

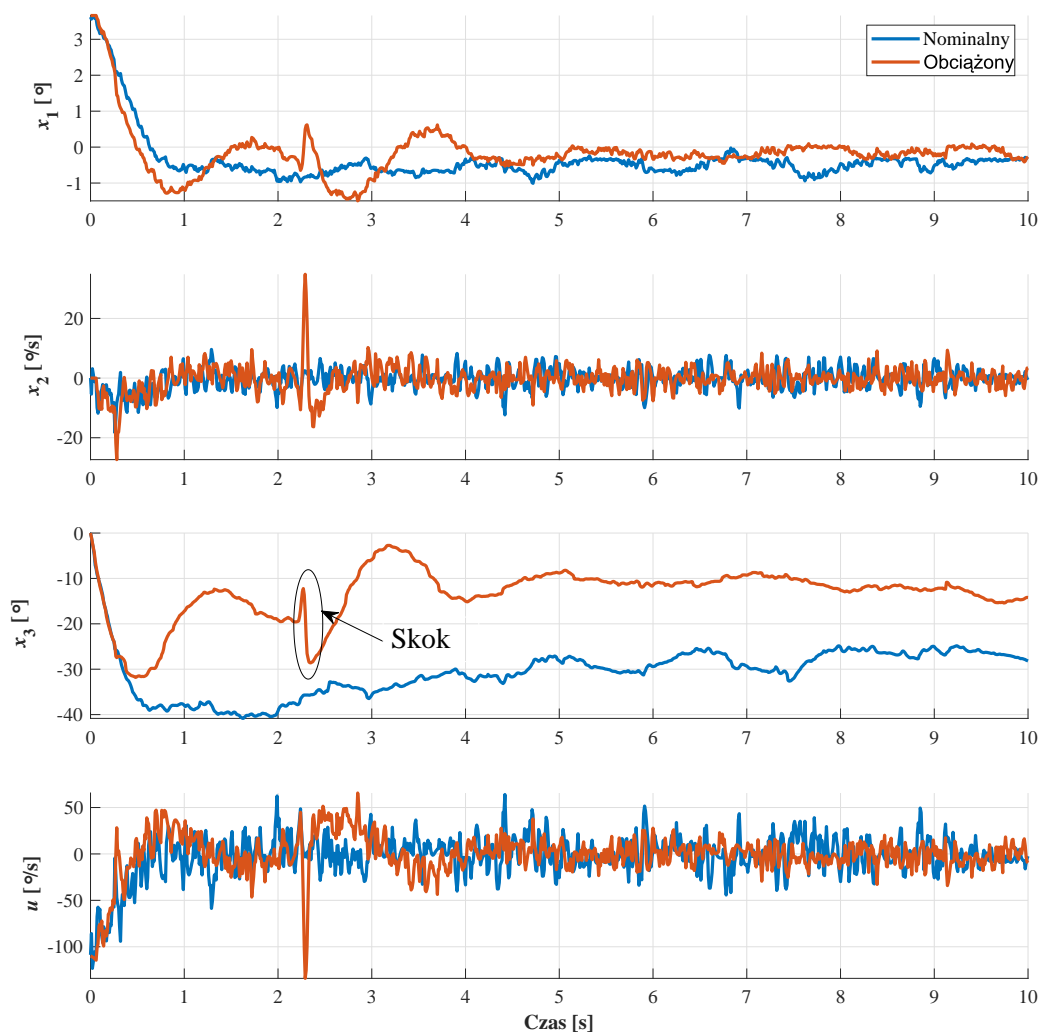
6.4.2.4. Linearyzujące sprzężenie zwrotne

Pierwszym testowanym algorytmem sterowania, spośród nieliniowych regulatorów, została metoda linearyzującego sprzężenia zwrotnego. Wypróbowano dwa zestawy parametrów:

- $K_1 = 20, K_2 = 5, K_3 = 0.1,$
- $K_1 = 20, K_2 = 1, K_3 = 0.1.$

Rezultaty zostały przedstawione na rysunku 6.36.

Obydwa zestawy różnią się tylko wartością parametru K_2 . Dla nastaw z niższą wartością widać bardzo duże oscylacje na wszystkich zmiennych stanu i sterowaniu. Natomiast dla wyższej wartości parametru K_2 przebieg jest aperiodyczny i dobrze utrzymuje się bardzo blisko punktu równowagi.

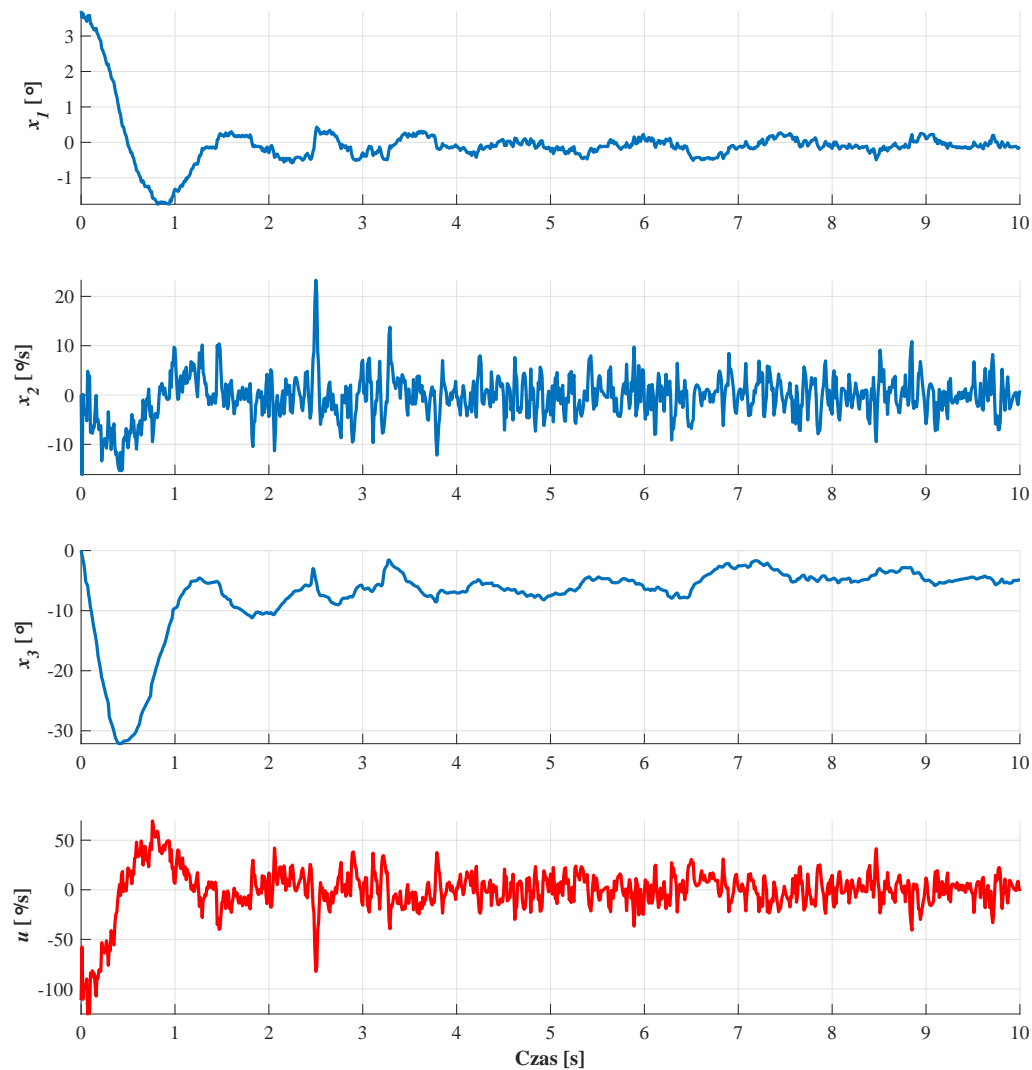


Rys. 6.32. Porównanie działania regulatora PD_{cos} dla modelu nominalnego oraz dla dodatkowego obciążenia.

Na rysunku 6.37 przedstawiono porównanie regulatora z linearyzującym sprzężeniem zwrotnym dla układu obciążonego i nieobciążonego. Można zauważyć, że zmienne stanu x_1 , x_2 oraz sterowanie mają bardzo podobne przebiegi. Jedynie kąt precesji **CMG** ma wyraźną różnicę między układem obciążonym i nieobciążonym, przy czym przez cały czas zmienna x_3 znajduje się bliżej położenia równowagi dla układu obciążonego.

6.4.2.5. Metoda funkcji Lapunowa

Dla regulatora zaimplementowanego zgodnie z formułą przedstawioną w rozdziale 5.3.2 nie uzyskano stabilizacji jednoślądu.



Rys. 6.33. Wyniki działania regulatora LQ.

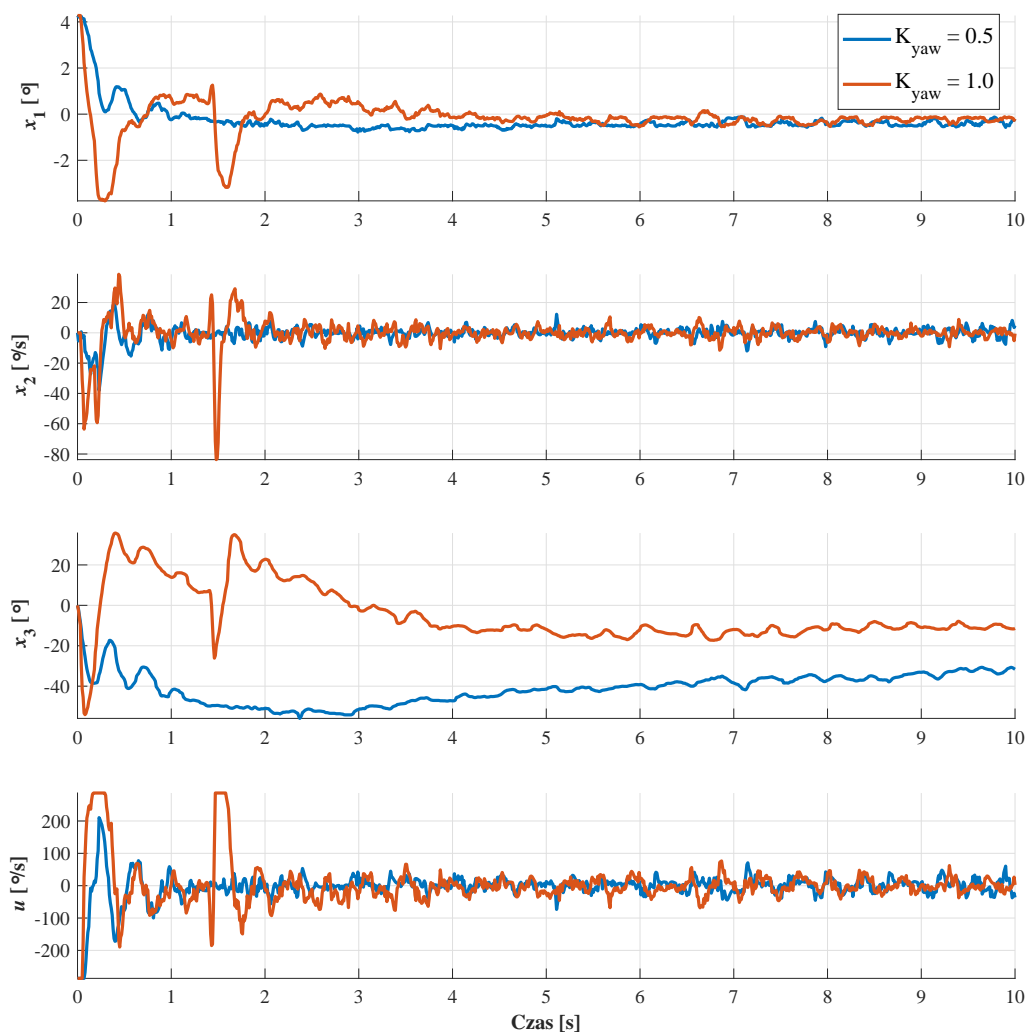
6.4.2.6. Sterowanie w reżimie ślizgowym

Na rysunku 6.38 widać, że zrealizowane sterowanie w reżimie ślizgowym nie stabilizowało układu asymptotycznie, lecz powodowało nietłumione oscylacje wokół punktu równowagi. Jest tak prawdopodobnie z powodu czułości tego regulatora na sygnał prędkości, który był zaszumiony.

6.4.2.7. Proponowane sterowanie odporne

Dla proponowanego w pracy regulatora odpornego przetestowano trzy zestawy parametrów:

- $C_1 = 25, C_2 = 3,$
- $C_1 = 25, C_2 = 5,$



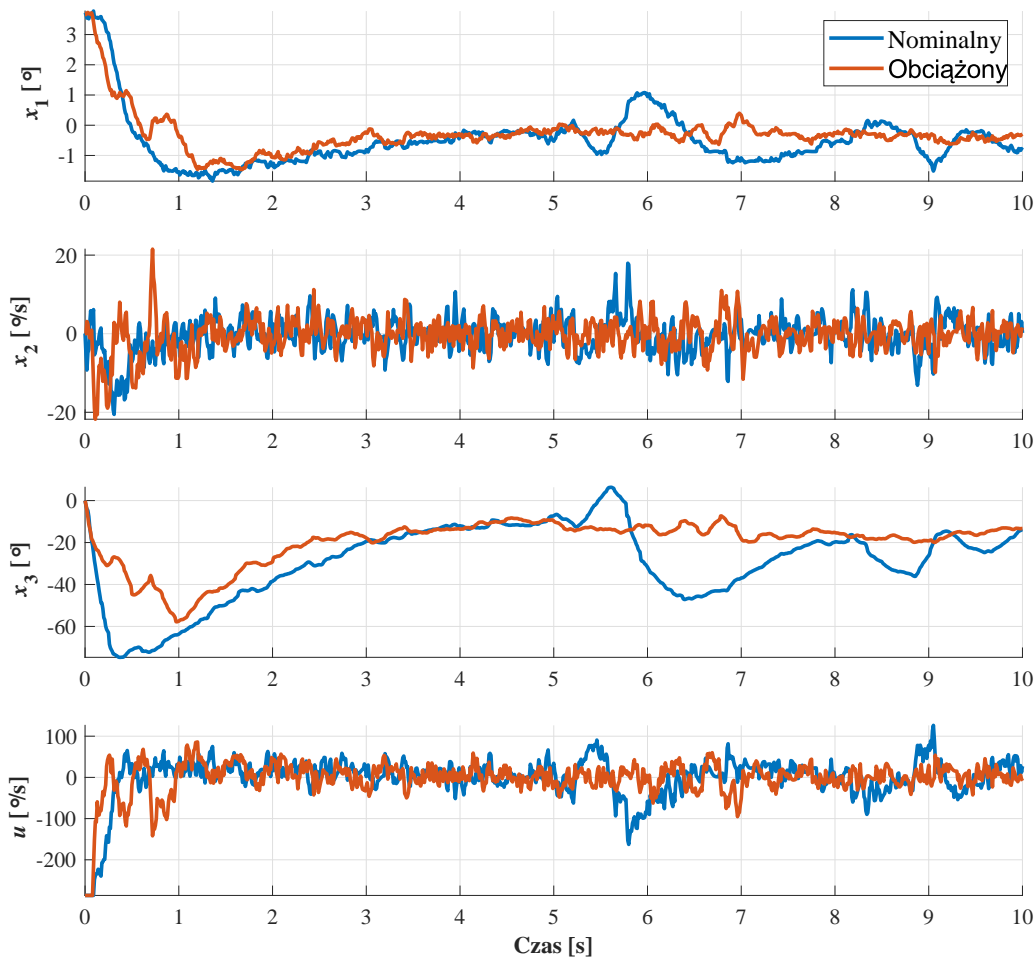
Rys. 6.34. Porównanie działania regulatora H_∞ dla różnych zestawów parametrów.

– $C_1 = 25$, $C_2 = 7$.

Zmienne x_1 , x_2 i u mają zbliżone przebiegi - można zobaczyć je na rysunku 6.39. Zauważalna różnica występuje tylko w przeciągu pierwszych dwóch sekund. dla $C_2 = 3$ zmienna x_1 ma drobne szybko gasnące oscylacje, dla $C_2 = 5$ występuje jedno przeregulowanie. Natomiast dla $C_2 = 7$, x_1 jest aperiodyczne.

Istotne różnice widoczne są tylko dla zmiennej x_3 . Przy czym dla nastawy z najniższą wartością C_2 kąt precesji najwolniej zbiega do pozycji równowagi.

Porównanie dla układu nieobciążonego i obciążonego przestawiono na rysunku 6.40. Z wykresu widać, że dla obydwu przypadków wszystkie zmienne stanu są podobne, a największa różnica występuje dla zmiennej x_3 .



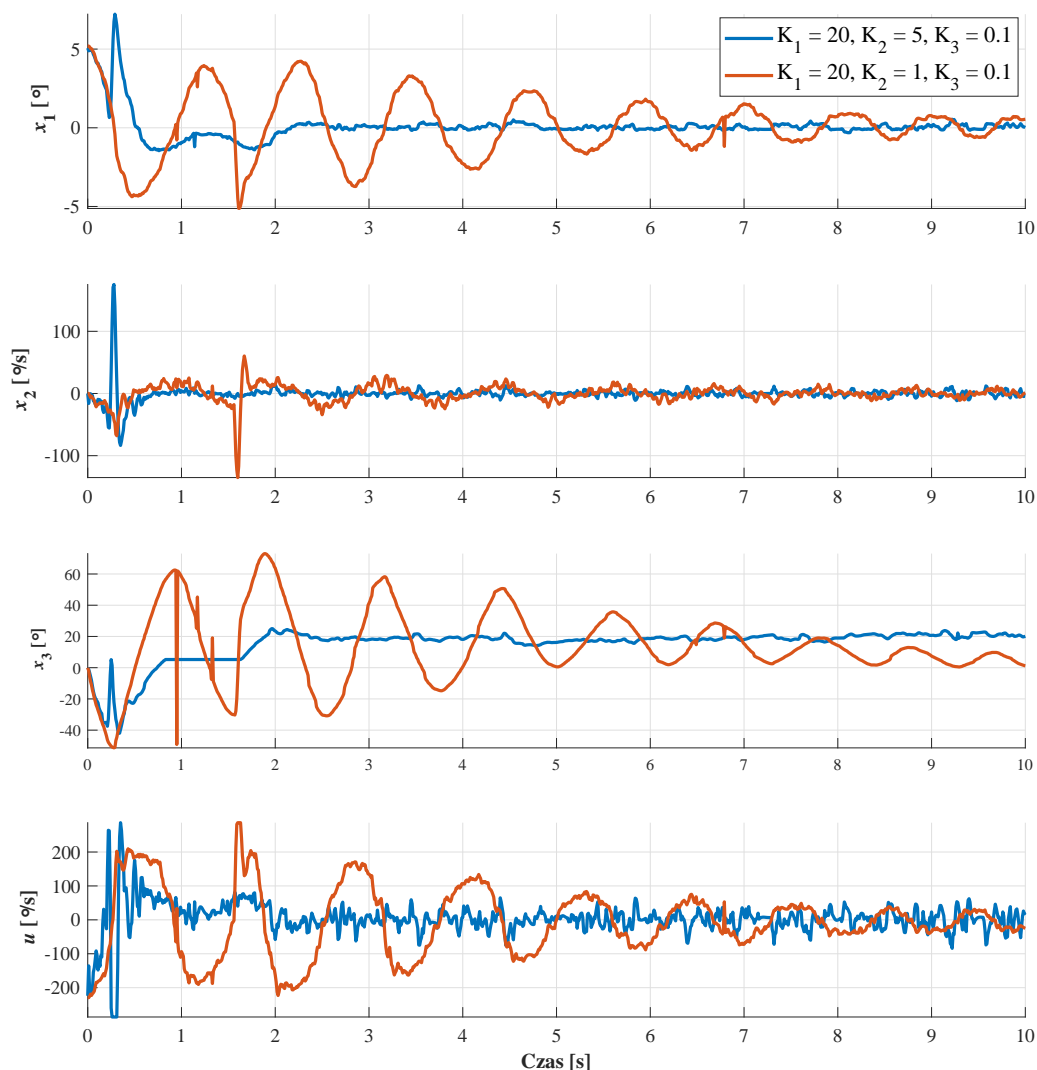
Rys. 6.35. Porównanie działania regulatora H_∞ dla modelu nominalnego oraz dla dodatkowego obciążenia.

6.4.2.8. Sterowanie z redukcją zakłóceń

W podejściu z redukcją zakłóceń jako bazowy regulator został użyty regulator PD_{cos} z nastawami: $K_P = 30$, $K_D = 4.5$, $K = 0.5$. Można zauważyć, iż estymowane zakłócenia są stosunkowo duże, mimo braku zakłócenia na x_2 . Występują stosunkowo duże odchyłki od pionu. Dzieje się tak prawdopodobnie dlatego, że zakładany model zakłóceń (5.63) uwzględniał jedynie zakłócenie zmiennej stanu x_2 , podczas gdy w rzeczywistości można zaobserwować zakłócenia („skoki”) na zmiennej x_3 , co wpływa na jakość estymaty zakłócenia.

Estymowane wartości zakłóceń przedstawiono na rysunku 6.42.

W tym przypadku nie dokonano porównania układu obciążonego i nieobciążonego.



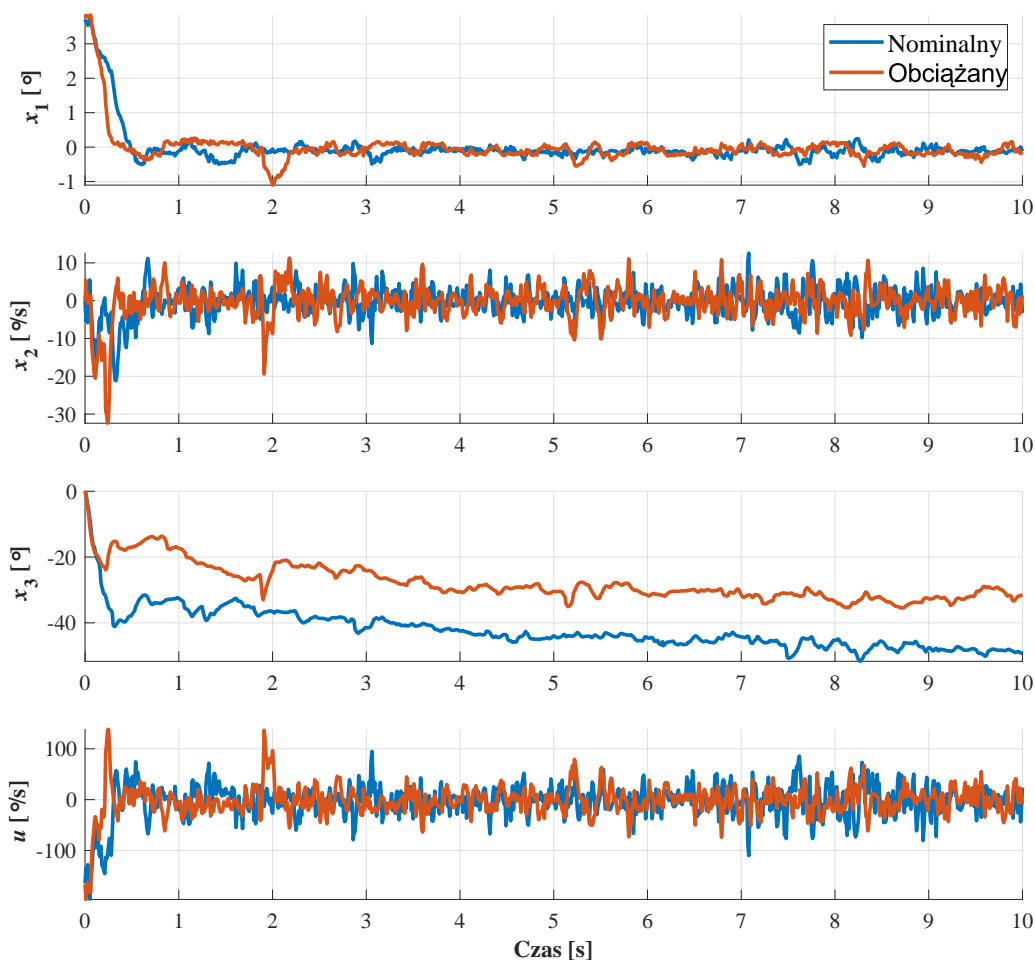
Rys. 6.36. Porównanie działania regulatora z linearyzującym sprzężeniem zwrotnym dla różnych zestawów parametrów.

6.4.3. Porównanie rezultatów badań

6.4.3.1. Wskaźniki jakości

Po przetestowaniu realizacji różnych algorytmów sterowania dokonane zostało ich porównanie po wyborze kilku kryteriów jakości:

- całka z kwadratu uchybu wychylenia,
- całka z kwadratu sterowania,
- całka z kwadratu uchybu stanu,



Rys. 6.37. Porównanie działania regulatora z linearyzującym sprzężeniem zwrotnym dla modelu nominalnego oraz dla dodatkowego obciążenia.

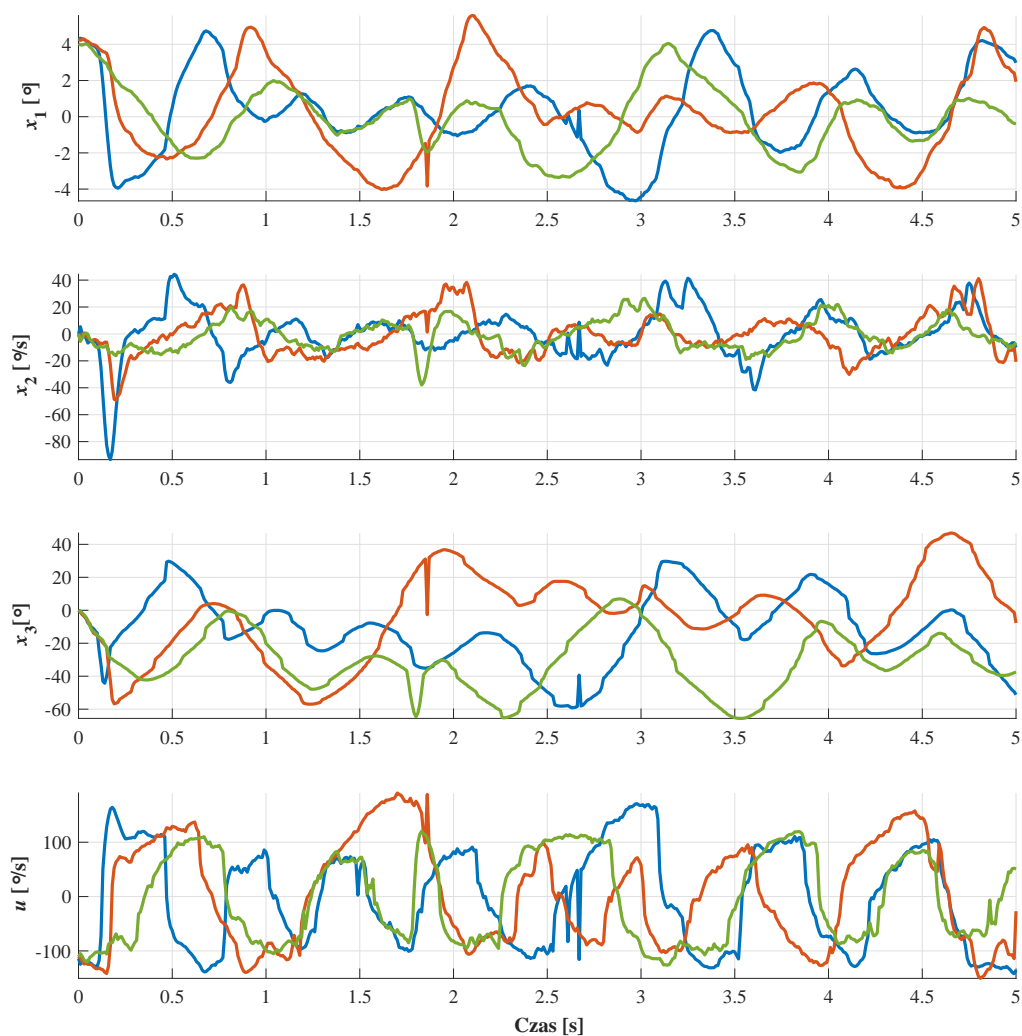
– czas regulacji.

Każde z wybranych kryteriów zostało zdefiniowane w kolejnych punktach.

Całka z kwadratu uchybu wychylenia

Celem projektowanych regulatorów jest zapewnienie stabilności w pionie. Dlatego sensowne jest rozważanie jako pierwszego wskaźnika, który uwzględnia tylko błąd tej wartości:

$$Q_1(u) = \int_0^T x_1(t)^2 dt. \quad (6.15)$$

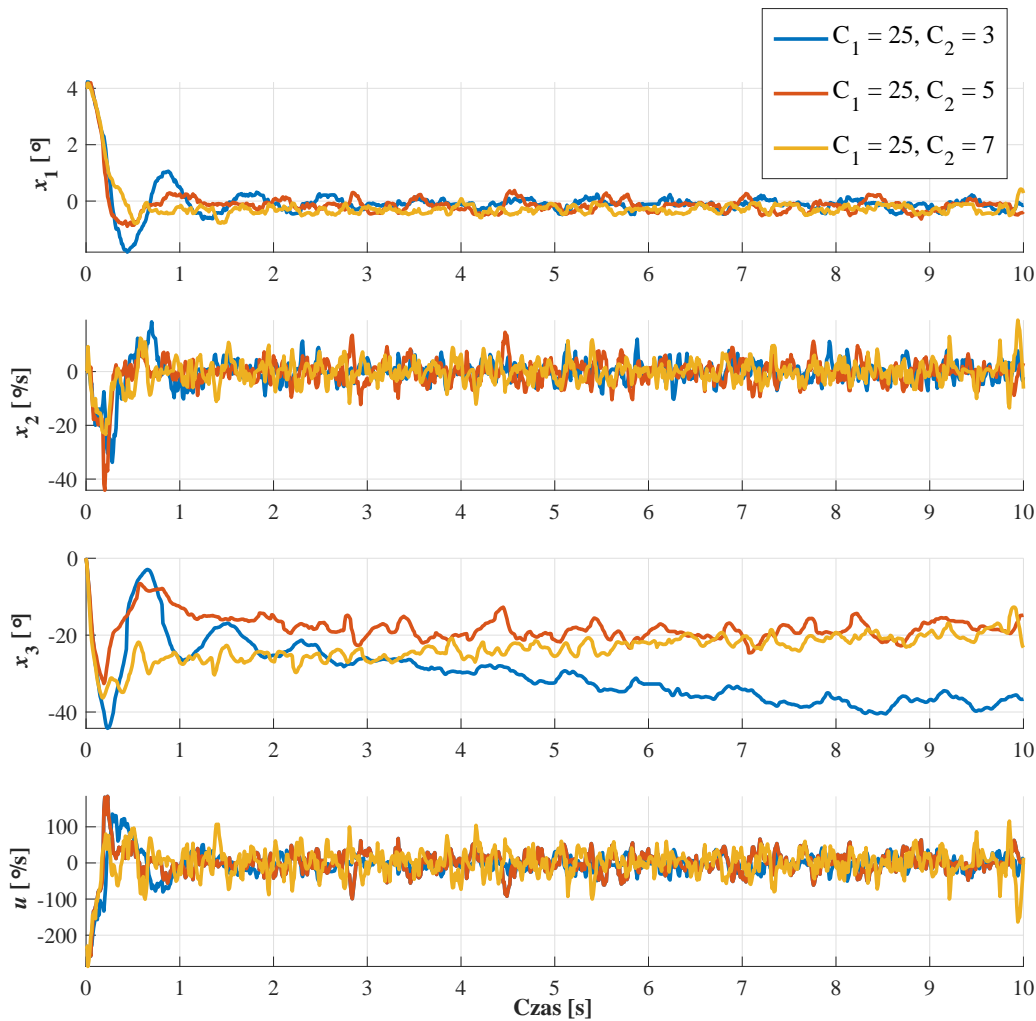


Rys. 6.38. Porównanie działania regulatora ślizgowego dla różnych zestawów parametrów. Wszystkie wykresy przedstawiają różne przebiegi dla tego samego algorytmu, z tymi samymi parametrami.

Całka z kwadratu sterowania

Kolejnym uwzględnionym czynnikiem jest energetyczna efektywność sterowania. W tym celu zdecydowano się na obliczenie całki z kwadratu sterowania.

$$Q_2(u) = \int_0^T u(t)^2 dt. \quad (6.16)$$



Rys. 6.39. Porównanie działania regulatora odpornego dla różnych zestawów parametrów.

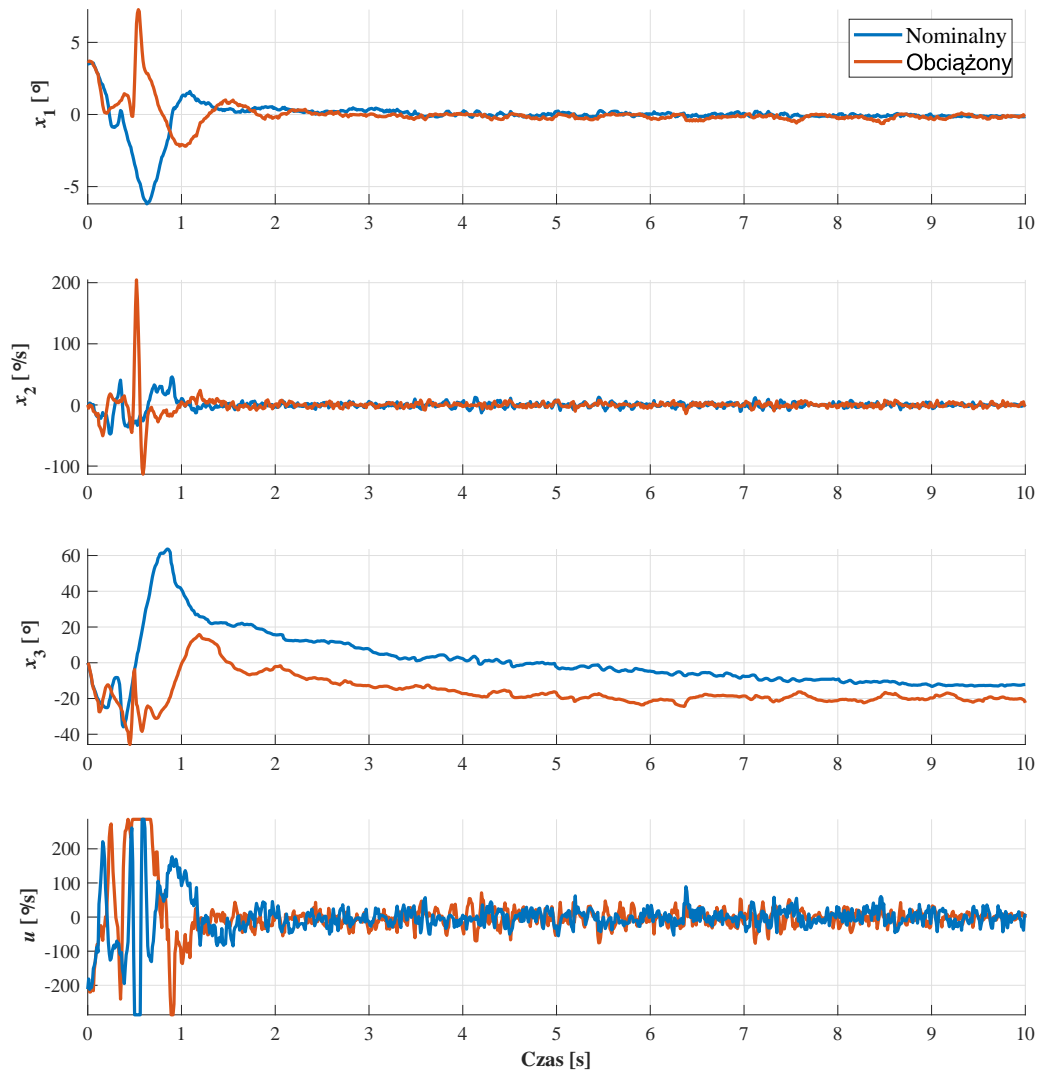
Całka z kwadratu uchybu stanu

Trzecim rozważanym kryterium jest całka z uchybu całego stanu.

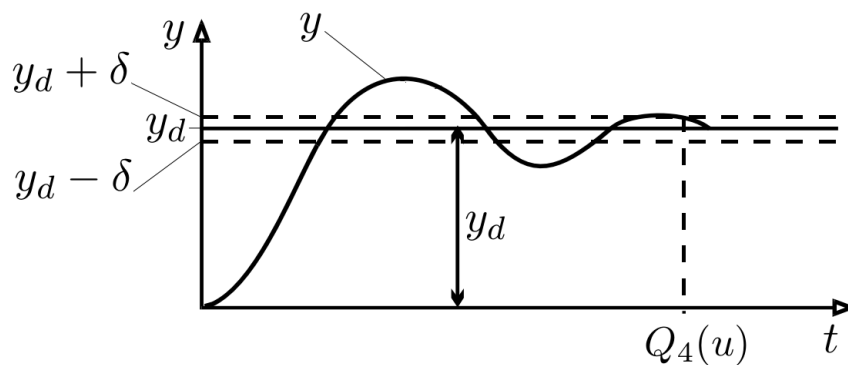
$$Q_3(u) = \int_0^T (x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + x_3(t)^2) dt. \quad (6.17)$$

Czas regulacji

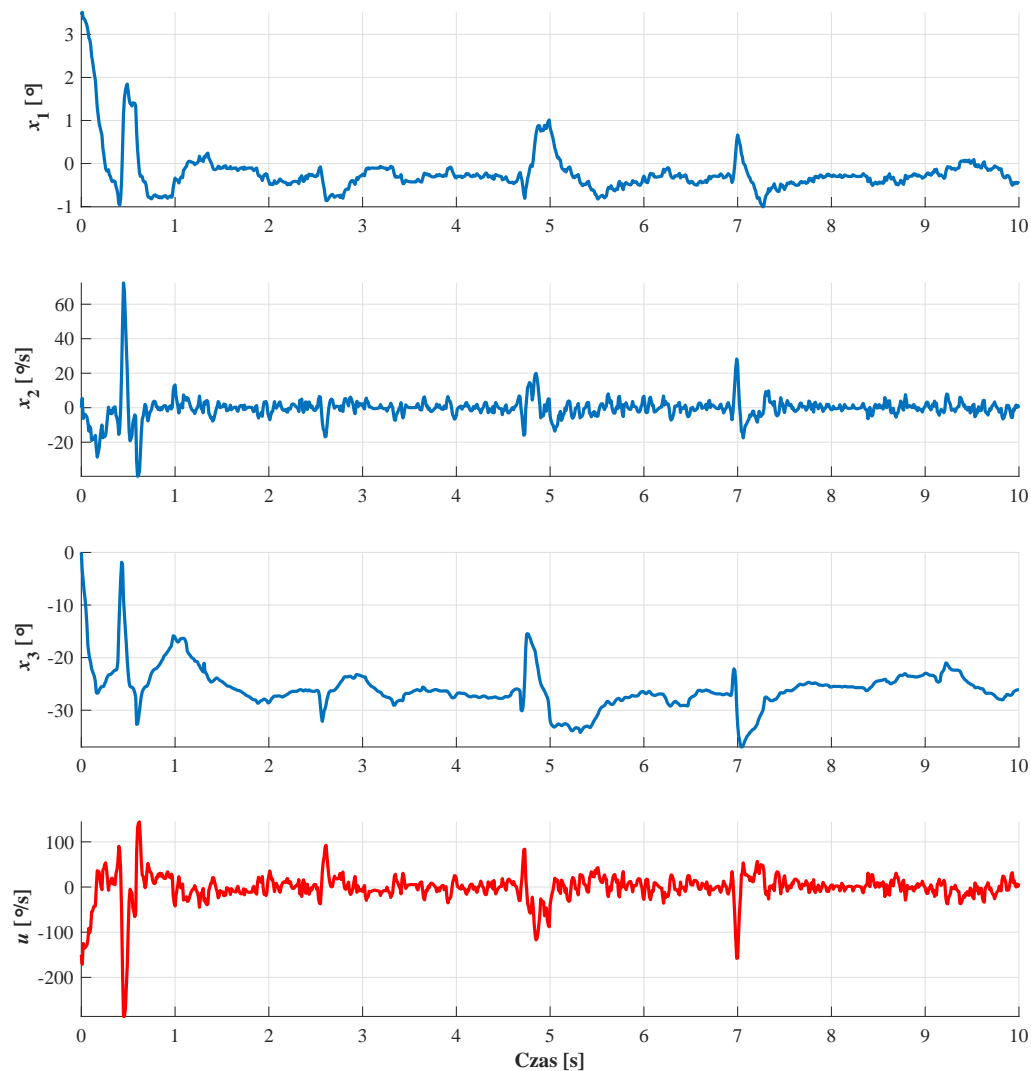
Czas regulacji jest to minimalny czas, po którym błąd między wartością regulowaną a wartością zadaną nie przekracza zadanej wartości. Sposób jego wyznaczenia przedstawiono na rysunku 6.43. W rozważanym przypadku najważniejszym sygnałem jest odchylenie roweru od pionu - x_1 - i to właśnie czas regulacji tego sygnału jest uwzględniany przy wyznaczeniu tego wskaźnika jakości. Kryterium to oznaczono jako $Q_4(u)$.



Rys. 6.40. Porównanie działania regulatora odpornego dla modelu nominalnego oraz dla dodatkowego obciążenia.



Rys. 6.43. Graficzna prezentacja kryterium $Q_4(u)$ - czasu regulacji.



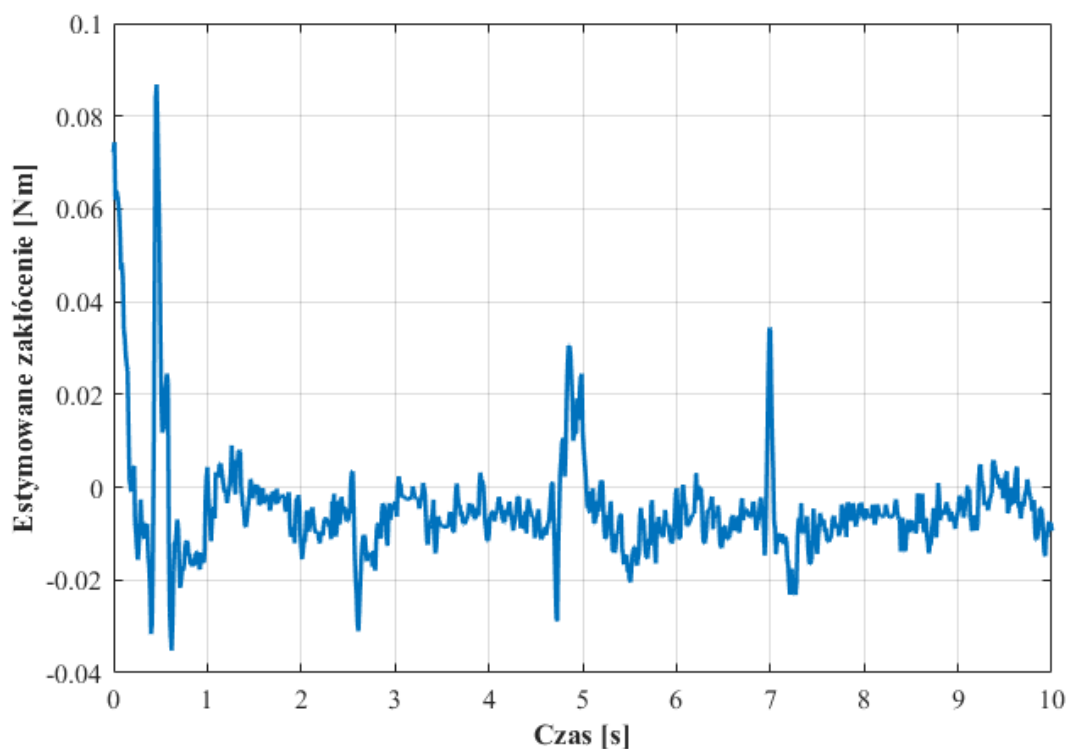
Rys. 6.41. Wyniki działania regulatora PD_{cos} z obserwatorem zakłóceń NDOBRC.

6.4.3.2. Porównanie

Dla wszystkich spośród przetestowanych algorytmów stabilizacji obliczone zostały wszystkie wskaźniki jakości przedstawione w poprzednim punkcie. Zostały one zbiorczo przedstawione w tabeli 6.1. Dodatkowo, rezultaty dla układu z obciążeniem pokazano w tabeli 6.2.

6.4.3.3. Wybór najlepszego regulatora

W celu wyboru najlepszego regulatora spośród przetestowanych posłużono się metodą macierzy Pu-gha [69]. Do wykonania tej oceny założono, że regulator PD_{cos} (z parametrami: $K_P = 30$, $K_D = 4$ i $K = 0.5$) jest regulatorem bazowym, względem którego oceniane są pozostałe. Zatem będzie on miał



Rys. 6.42. Estymowane zakłócenia.

bazową ocenę 0. Pozostałymi regulatorami uwzględnianymi w zestawieniu były: regulator H_∞ (z parametrem: $K_{yaw} = 0.5$), regulator z linearyzującym sprzężeniem zwrotnym (z parametrami: $K_1 = 20$, $K_2 = 20$, $K_3 = 0.1$) i proponowany regulator odporny (z parametrami: $C_1 = 25$ i $C_2 = 5$). Natomiast kategoriami, brany do oceny, są wskaźniki $Q_1(u)$, $Q_2(u)$, $Q_3(u)$, $Q_4(u)$ w przypadku układu nominalnego i układu z obciążeniem. Zatem uwzględniane w ocenie jest 8 czynników, które brane są pod uwagę z jednakową wagą.

Wyniki przeprowadzonej analizy przedstawiono w tabeli 6.3. Można zauważyć, iż regulator PD_{cos} i regulator oparty o technikę linearyzującego sprzężenia zwrotnego uzyskały jednakową sumaryczną ocenę. Regulator H_∞ uzyskał ocenę niższą od regulatora bazowego. Natomiast najlepszy wynik osiągnięto dla zaproponowanego w pracy regulatora odpornego.

Algorytm	Parametry	$Q_1(u)[^\circ^2]$	$Q_2(u)[^\circ^2]$	$Q_3(u)[-]$	$Q_4(u)[s]$
Odporny	$C_1 = 25, C_2 = 7$	3.1217	11656.5632	3475.2832	0.60
Odporny	$C_1 = 25, C_2 = 5$	2.7730	10132.0259	1771.4806	0.59
Odporny	$C_1 = 25, C_2 = 3$	3.6041	11951.5601	3581.768	1.36
FL	$K_1 = 20, K_2 = 5, K_3 = 0.1$	4.1518	17132.3865	5515.0978	0.76
FL	$K_1 = 20, K_2 = 3, K_3 = 0.1$	5.5708	11691.9262	2341.1145	1.41
FL	$K_1 = 20, K_2 = 1, K_3 = 0.1$	34.5731	91620.5457	8087.4707	9.23
PD	$K_P = 30, K_D = 1, K = 0.25$	6.3113	6569.7419	6206.9186	4.97
PD	$K_P = 30, K_D = 1, K = 0.5$	6.0495	5564.7714	2130.8288	3.32
PD	$K_P = 30, K_D = 3, K = 0.5$	2.7929	3145.3974	1551.5923	2.24
PD	$K_P = 30, K_D = 4, K = 0.5$	2.9058	2654.6161	1422.1958	2.82
PD	$K_P = 30, K_D = 4.5, K = 0.5$	6.3275	4160.8919	2694.7971	2.93
H_∞	$K_{yaw} = 0.5$	3.8909	15998.9471	10781.5874	2.51
H_∞	$K_{yaw} = 1$	6.2251	44646.5733	2353.0241	1.4
NDOB	PD jako bazowy	2.5938	9431.3989	3553.3266	0.99
LQ		7.7073	6542.2202	1967.0596	1.27

Tabela 6.1. Tabela z wartościami wskaźników jakości dla testowanych algorytmów. Na zielono zaznaczono najlepszy wynik w kolumnie, na fioletowo drugi, a na niebiesko trzeci.

Algorytm	Parametry	$Q_1(u)[^\circ^2]$	$Q_2(u)[^\circ^2]$	$Q_3(u)[-]$	$Q_4(u)[s]$
Odporny	$C_1 = 25, C_7 = 7$	3.6059	17284.4286	3778.4183	1.69
H_∞	$K_{yaw} = 1$	4.8023	14517.967	4013.3362	3.41
PD	$P = 30, D = 4.5, K = 0.5$	4.742	4603.0205	1592.009	4.45
FL	$K_1 = 20, K_2 = 5, K_3 = 0.1$	2.4085	6133.7387	3200.7771	2.16

Tabela 6.2. Tabela z wartościami wskaźników jakości dla testowanych algorytmów. Na zielono zaznaczono najlepszy wynik w kolumnie, na fioletowo drugi, a na niebiesko trzeci.

	Waga	PD_{cos}	H_{∞}	FL	Odporny
$Q_1(u)$ Nominalny	1	0	-1	-1	+1
$Q_2(u)$ Nominalny	1	0	-1	-1	-1
$Q_3(u)$ Nominalny	1	0	-1	-1	0
$Q_4(u)$ Nominalny	1	0	+1	+1	+1
$Q_1(u)$ Obciążony	1	0	0	+1	+1
$Q_2(u)$ Obciążony	1	0	-1	0	-1
$Q_3(u)$ Obciążony	1	0	-1	-1	-1
$Q_4(u)$ Obciążony	1	0	+1	+1	+1
Suma	1	0	-3	0	+1

Tabela 6.3. Macierz Puga dla proponowanych regulatorów.

7. Podsumowanie

Celem niniejszej rozprawy było opracowanie modelu matematycznego oraz funkcjonalnego badawczego modelu eksperymentalnego jednośladu ze stabilizatorem żyroskopowym i udowodnienie tezy, iż z powodzeniem można stabilizować pozycję pionową przy obecności niepewnych parametrów. Kolejnym celem pracy było zbadanie, czy algorytmy nieliniowe zapewnią lepszą jakość stabilizacji i większy obszar przyciągania dla wybranego punktu równowagi.

W wyniku przeprowadzonych badań analitycznych, symulacyjnych i eksperymentalnych udowodniono powyższe tezy. Wykazano, że algorytmy liniowe nie są w stanie zapewnić tak dużego obszaru atrakcji jak algorytmy nieliniowe. Pokazano, iż w związku z nieliniowością macierzy sterowania, wraz ze wzrostem kąta obrotu **CMG**, wpływ sterowania maleje i przy odpowiednio dużym kącie obrotu układ może się zdestabilizować. Zostało to wykazane zarówno analitycznie jak i eksperymentalnie. Do eksperymentów wykorzystano zaprojektowany i wykonany specjalnie w tym celu model laboratoryjny jednośladu ze stabilizatorem żyroskopowym.

Należy zaznaczyć, że oryginalnymi osiągnięciami autora zaprezentowanymi w rozprawie doktorskiej są:

- opracowanie modelu matematycznego jednośladu ze stabilizatorem żyroskopowym, posiadającym informację o zakłóceniach pochodzących od ruchu kierownicą, dla którego sygnałem sterującym jest prędkość precesji koła zamachowego,
- opracowanie nieliniowego regulatora odpornego na zmienność parametrów (w pewnym przedziale zmienności $a \in [a_{min}, a_{max}]$) opartego na twierdzeniu Charitonowa,
- ocena i porównanie różnych algorytmów sterowania, liniowych i nieliniowych, względem wybranych wskaźników jakości.

Postawione tezy udowodniono stosując zewnętrzny układ pomiarowy położenia jednośladu. Problem techniczny, który nie znalazł skutecznego rozwiązania, jest związany z zastosowaniem niskiej klasy układu pomiaru orientacji oraz wpływu na niego zakłóceń wysokoczęstotliwościowych, pochodzących od sterowanego **CMG**.

Mimo pozytywnego zweryfikowania postawionych sobie tez, wciąż pozostaje otwartych wiele zagadnień, mogących stanowić przyszłe zagadnienia badawcze. Są to między innymi:

- budowa w pełni autonomicznego modelu eksperymentalnego, dzięki któremu możliwe będzie zbadanie stabilizacji roweru podczas ruchu,
- wybór optymalnej konfiguracji jednostki pomiarowej orientacji dla zastosowań w rowerach/motocyklach autonomicznych,
- ulepszenie stabilizatora żyroskopowego poprzez zastosowanie łożysk magnetycznych w celu wyeliminowania drgań wprowadzanych przez silnik **BLDC**, napędzający koło zamachowe,
- budowa modelu w dużej skali, pozwalającego na utrzymanie dorosłego człowieka,
- opracowanie algorytmu „monitorującego” kierowcę w celu optymalizacji działania stabilizatora i uruchamiania go wyłącznie w niezbędnych przypadkach przy jednoczesnym zaniedbaniu reakcji w wychyleniach intencjonalnych.

A. Macierz obserwowalności modelu pełnego sterowanego momentem

Wzory na elementy macierzy sterowalności modelu pełnego sterowanego momentem przedstawione w tym dodatku uzyskane zostały przy użyciu Toolboxu Symbolic pakietu MATLAB.

$$\begin{aligned}
 q_{23}^{torque}(x) = & \frac{1}{JJ_r} [(2x_2^2 \cos x_1^2)J_r - (2x_2^2 \sin x_1^2)J_r + (2\mathbf{G} \cos x_1 \sin x_1^2)J^4 - \\
 & (2J_p x_2^2 \cos(x_1)^2)/(JJ_r) + (2J_p x_2^2 \sin x_1^2)/(JJ_r) + (2B_m x_2 \cos(x_1) \sin x_1)/(JJ_r) - \\
 & (2G J_p \cos(x_1) \sin x_1^2)/(J^2 J_r) + (B_m J_p w \cos x_4)/(J J_r^2) + (B_m J_p w x_4 \sin x_4)/(J J_r^2) - \\
 & (2J_p w x_4^2 \cos(x_1) \sin x_1 \sin x_4)/J^2 + (B_m J_p w x_4^2 \cos x_4)/(J J_r^2) + (2J_p^2 w^2 x_2 \cos x_3 \sin x_4)/(J J_r^2) - \\
 & (2B_m J_p x_2 \cos(x_1) \sin x_1)/(J J_r^2) + (2J_p^2 w x_4^2 \cos(x_1) \sin x_1 \sin x_4)/(J^2 J_r) - \\
 & (2J_p^2 w x_2^2 \cos x_3 \sin x_3 \sin x_4)/(J J_r^2) + (J_p^2 w^2 x_2 x_4 \cos x_3 \cos x_4)/(J J_r^2) + \\
 & (2J_p w x_2^2 \cos x_3 \sin x_3 \sin x_4)/(J J_r) + (J_p w x_2^2 x_4 \cos x_3 \cos x_4 \sin x_3)/(J J_r) - \\
 & (J_p^2 w x_2^2 x_4 \cos x_3 \cos x_4 \sin x_3)/(J J_r^2)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{43}^{torque}(x) = & \frac{B_m^2}{J_r^3} - (x_2^2 \cos x_3^2)/J_r + (x_2^2 \sin x_3^2)/J_r + (J_p x_2^2 \cos x_3^2)/J_r^2 - (J_p x_2^2 \sin x_3^2)/J_r^2 + \\
 & (J_p w x_2 \sin x_3)/J_r^2 + (4x_2^2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3)/J + (J_p^2 w^2 \cos x_3 \cos x_4)/(J J_r^2) - \\
 & (J_p^2 w^2 x_4 \cos x_3 \sin x_4)/(J J_r^2) - (8J_p x_2^2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3)/(J J_r) + \\
 & (2J_p w x_2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1)/(J J_r) + (2J_p w x_2 \cos x_3 \cos x_4 \sin x_3)/(J J_r) + \\
 & (4J_p^2 x_2^2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3)/(J J_r^2) - (2J_p^2 w x_2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1)/(J J_r^2) - \\
 & (2J_p^2 w x_2 \cos x_3 \cos x_4 \sin x_3)/(J J_r^2) - (2J_p w x_2 x_4 \cos x_3 \sin x_3 \sin x_4)/(J J_r) + \\
 & (2J_p^2 w x_2 x_4 \cos x_3 \sin x_3 \sin x_4)/(J J_r^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{14}^{torque}(x) = & (4x_2^2 \sin x_1^2)/J - (4x_2^2 \cos(x_1)^2)/J - (4G \cos(x_1) \sin x_1^2)/J^2 + \\
 & (4J_p x_2^2 \cos(x_1)^2)/(J J_r) - (4J_p x_2^2 \sin x_1^2)/(J J_r) - (2B_m x_2 \cos(x_1) \sin x_1)/(J J_r) + \\
 & (4G J_p \cos(x_1) \sin x_1^2)/(J^2 J_r) - (B_m J_p w \cos x_4)/(J J_r^2) - (8J_p x_2 x_4 \cos(x_1)^2 \sin x_1^2)/J^2 + \\
 & (4J_r x_2 x_4 \cos(x_1)^2 \sin x_1^2)/J^2 - (3B_m J_p w x_4 \sin x_4)/(J J_r^2) + (2J_p w x_4^2 \cos(x_1) \sin x_1 \sin x_4)/J^2 - \\
 & (2B_m J_p w x_4^2 \cos x_4)/(J J_r^2) - (4J_p^2 w^2 x_2 \cos x_3 \sin x_4)/(J J_r^2) + (2B_m J_p x_2 \cos(x_1) \sin x_1)/(J J_r^2) + \\
 & (4J_p^2 x_2 x_4 \cos(x_1)^2 \sin x_1^2)/(J^2 J_r) + (2J_p w x_4 \cos(x_1) \cos x_4 \sin x_1)/J^2 - \\
 & (2J_p^2 w x_4^2 \cos(x_1) \sin x_1 \sin x_4)/(J^2 J_r) + (4J_p^2 w x_2^2 \cos x_3 \sin x_3 \sin x_4)/(J J_r^2) - \\
 & (2J_p^2 w^2 x_2 x_4 \cos x_3 \cos x_4)/(J J_r^2) - (2J_p^2 w x_4 \cos(x_1) \cos x_4 \sin x_1)/(J^2 J_r) - \\
 & (4J_p w x_2^2 \cos x_3 \sin x_3 \sin x_4)/(J J_r) - (2J_p w x_2^2 x_4 \cos x_3 \cos x_4 \sin x_3)/(J J_r) + \\
 & (2J_p^2 w x_2^2 x_4 \cos x_3 \cos x_4 \sin x_3)/(J J_r^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{24}^{torque}(x) = & (2B_mx_2^2\cos(x_1)^2)/(JJ_r) - (8x_2^3\cos(x_1)\sin x_1)/J - (6Gx_2\sin x_1^3)/J^2 - \\
& (2B_mx_2^2\sin x_1^2)/(JJ_r) - (2x_2^3\cos(x_1)\cos x_3^2\sin x_1)/J + (10Gx_2\cos(x_1)^2\sin x_1)/J^2 + \\
& (2x_2^3\cos(x_1)\sin x_1\sin x_3^2)/J + (6GJ_px_2\sin x_1^3)/(J^2J_r) + (J_p^3w^3\cos x_3\cos x_4^2)/(J^2J_r^2) - \\
& (2B_mJ_px_2^2\cos(x_1)^2)/(JJ_r^2) + (2B_mJ_px_2^2\sin x_1^2)/(JJ_r^2) + (2B_mG\cos(x_1)\sin x_1^2)/(J^2J_r) + \\
& (2B_m^2x_2\cos(x_1)\sin x_1)/(JJ_r^2) - (8GJ_px_4\cos(x_1)^2\sin x_1^3)/J^3 + (4GJ_r x_4\cos(x_1)^2\sin x_1^3)/J^3 + \\
& (8J_px_2^3\cos(x_1)\sin x_1)/(JJ_r) - (16J_px_2^2x_4\cos(x_1)\sin x_1^3)/J^2 + (16J_px_2^2x_4\cos(x_1)^3\sin x_1)/J^2 + \\
& (8J_r x_2^2x_4\cos(x_1)\sin x_1^3)/J^2 - (8J_r x_2^2x_4\cos(x_1)^3\sin x_1)/J^2 + (B_m^2J_pw\cos x_4)/(JJ_r^3) + \\
& (4J_px_2^2\cos(x_1)^2\cos x_3\sin x_1^2)/J^2 - (3J_p^3w^3x_2^2\cos x_3^2\cos x_4)/(JJ_r^3) - \\
& (J_p^3w^3x_4^2\cos x_3\cos x_4^2)/(J^2J_r^2) + (J_p^3w^3x_4^2\cos x_3\sin x_4^2)/(J^2J_r^2) - \\
& (2J_p^2x_2^3\cos(x_1)\cos x_3^2\sin x_1)/(JJ_r^2) + (2J_p^2x_2^3\cos(x_1)\sin x_1\sin x_3^2)/(JJ_r^2) - \\
& (J_pwx_2^2\cos x_3^2\cos x_4)/(JJ_r) + (J_pwx_2^2\cos x_4\sin x_3^2)/(JJ_r) + (J_p^2w^2x_2\cos x_4\sin x_3)/(JJ_r^2) + \\
& (GJ_pw\cos(x_1)\cos x_4)/(J^2J_r) + (8J_p^2wx_4^3\cos(x_1)^2\sin x_1^2\sin x_4)/J^3 - \\
& (24J_px_2^3\cos(x_1)^2\cos x_3\sin x_1^2\sin x_3)/J^2 + (8J_r x_2^3\cos(x_1)^2\cos x_3\sin x_1^2\sin x_3)/J^2 - \\
& (B_m^2J_pwx_4\sin x_4)/(JJ_r^3) + (4GJ_p^2x_4\cos(x_1)^2\sin x_1^3)/(J^3J_r) - (2B_mGJ_p\cos(x_1)\sin x_1^2)/(J^2J_r^2) + \\
& (J_p^2wx_2^2\cos x_3^2\cos x_4)/(JJ_r^2) - (3B_m^2J_pwx_4^2\cos x_4)/(JJ_r^3) - (6J_pwx_2x_4\cos(x_1)^2\cos x_4)/J^2 - \\
& (J_p^2wx_2^2\cos x_4\sin x_3^2)/(JJ_r^2) + (8J_p^2x_2^2x_4\cos(x_1)\sin x_1^3)/(J^2J_r) - \\
& (8J_p^2x_2^2x_4\cos(x_1)^3\sin x_1)/(J^2J_r) + (4J_px_2^3\cos(x_1)\cos x_3^2\sin x_1)/(JJ_r) + \\
& (B_m^2J_pwx_4^3\sin x_4)/(JJ_r^3) - (2B_m^2J_px_2\cos(x_1)\sin x_1)/(JJ_r^3) + (6J_pwx_2x_4\cos x_4\sin x_1^2)/J^2 - \\
& (10GJ_px_2\cos(x_1)^2\sin x_1)/(J^2J_r) - (4J_px_2^3\cos(x_1)\sin x_1\sin x_3^2)/(JJ_r) - \\
& (8J_p^2wx_2^2\cos(x_1)^2\cos x_3\sin x_1^2)/(J^2J_r) + (4J_p^3wx_2^2\cos(x_1)^2\cos x_3\sin x_1^2)/(J^2J_r^2) - \\
& (6J_p^2w^2x_2^3\cos x_3^2\cos x_4\sin x_3)/(JJ_r^2) + (6J_p^2wx_2^4\cos x_3^2\cos x_4\sin x_3^2)/(JJ_r^2) + \\
& (6J_p^3w^2x_2^3\cos x_3^2\cos x_4\sin x_3)/(JJ_r^3) - (3J_p^3wx_2^4\cos x_3^2\cos x_4\sin x_3^2)/(JJ_r^3) - \\
& (4J_p^3wx_4^3\cos(x_1)^2\sin x_1^2\sin x_4)/(J^3J_r) + (2GJ_p^2w^2\cos x_3\sin x_1\sin x_4)/(J^2J_r^2) + \\
& (J_pwx_2^2x_4^2\cos x_3^2\cos x_4)/(JJ_r) - (J_pwx_2^2x_4^2\cos x_4\sin x_3^2)/(JJ_r) - \\
& (3J_p^2wx_2^2x_4\cos x_3^2\sin x_4)/(JJ_r^2) - (J_p^2w^2x_2x_4^2\cos x_4\sin x_3)/(JJ_r^2) - \\
& (4J_p^3w^3x_4\cos x_3\cos x_4\sin x_4)/(J^2J_r^2) + (3J_p^2wx_2^2x_4\sin x_3^2\sin x_4)/(JJ_r^2) - \\
& (2J_p^2wx_2^2\cos(x_1)\sin x_1\sin x_3)/(JJ_r^2) - (4J_pJ_rwx_4^3\cos(x_1)^2\sin x_1^2\sin x_4)/J^3 + \\
& (24J_p^2x_2^3\cos(x_1)^2\cos x_3\sin x_1^2\sin x_3)/(J^2J_r) - (8J_p^3x_2^3\cos(x_1)^2\cos x_3\sin x_1^2\sin x_3)/(J^2J_r^2) - \\
& (J_p^2wx_2^2x_4^2\cos x_3^2\cos x_4)/(JJ_r^2) + (J_p^2wx_2^2x_4^2\cos x_4\sin x_3^2)/(JJ_r^2) + \\
& (J_p^3w^3x_2^2x_4\cos x_3^2\sin x_4)/(JJ_r^3) + (2J_p^2w^2x_2\cos x_3\cos x_4^2\sin x_3)/(J^2J_r) - \\
& (3J_pwx_2^4\cos x_3^2\cos x_4\sin x_3^2)/(JJ_r) - (2J_p^3w^2x_2\cos x_3\cos x_4^2\sin x_3)/(J^2J_r^2) + \\
& (6J_p^2wx_2x_4\cos(x_1)^2\cos x_4)/(J^2J_r) - (6J_p^2wx_2x_4\cos x_4\sin x_1^2)/(J^2J_r) + \\
& (3J_pwx_2^2x_4\cos x_3^2\sin x_4)/(JJ_r) - (3J_pwx_2^2x_4\sin x_3^2\sin x_4)/(JJ_r) - \\
& (3J_p^2w^2x_2x_4\sin x_3\sin x_4)/(JJ_r^2) - (GJ_pwx_4\cos(x_1)\sin x_4)/(J^2J_r) + \\
& (2J_pwx_2^2\cos(x_1)\sin x_1\sin x_3)/(JJ_r) + (8J_pwx_2^2\cos(x_1)\cos x_3\cos x_4\sin x_1\sin x_3)/J^2 - \\
& (6B_mJ_p^2w^2x_2x_4\cos x_3\cos x_4)/(JJ_r^3) + (4J_p^2w^2x_2\cos(x_1)\cos x_3\cos x_4\sin x_1)/(J^2J_r) - \\
& (4J_p^3w^2x_2\cos(x_1)\cos x_3\cos x_4\sin x_1)/(J^2J_r^2) + (4B_mJ_pwx_4^3\cos(x_1)\cos x_4\sin x_1)/(J^2J_r) + \\
& (J_pwx_2^4x_4\cos x_3^2\sin x_3^2\sin x_4)/(JJ_r) + (6B_mJ_pwx_4^2\cos(x_1)\sin x_1\sin x_4)/(J^2J_r) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2J_p^2 w^2 x_2 x_4^2 \cos x_3 \cos x_4^2 \sin x_3)/(J^2 J_r) + (2J_p^3 w^2 x_2 x_4^2 \cos x_3 \cos x_4^2 \sin x_3)/(J^2 J_r^2) + \\
& (2B_m J_p^2 w^2 x_2 x_4^2 \cos x_3 \sin x_4)/(J J_r^3) - (4B_m J_p^2 w x_4^3 \cos(x_1) \cos x_4 \sin x_1)/(J^2 J_r^2) + \\
& (2J_p^2 w^2 x_2 x_4^2 \cos x_3 \sin x_3 \sin x_4^2)/(J^2 J_r) + (2J_p^2 w^2 x_2^3 x_4 \cos x_3^2 \sin x_3 \sin x_4)/(J J_r^2) - \\
& (2J_p^2 w x_2^4 x_4 \cos x_3^2 \sin x_3^2 \sin x_4)/(J J_r^2) - (2J_p^3 w^2 x_2 x_4^2 \cos x_3 \sin x_3 \sin x_4^2)/(J^2 J_r^2) - \\
& (2J_p^3 w^2 x_2^3 x_4 \cos x_3^2 \sin x_3 \sin x_4)/(J J_r^3) + (J_p^3 w x_2^4 x_4 \cos x_3^2 \sin x_3^2 \sin x_4)/(J J_r^3) + \\
& (G J_p^2 w^2 x_4 \cos x_3 \cos x_4 \sin x_1)/(J^2 J_r^2) - (6B_m J_p^2 w x_4^2 \cos(x_1) \sin x_1 \sin x_4)/(J^2 J_r^2) + \\
& (2J_p^2 w^2 x_2 x_4^2 \cos(x_1) \cos x_3 \cos x_4 \sin x_1)/(J^2 J_r) - (2J_p^3 w^2 x_2 x_4^2 \cos(x_1) \cos x_3 \cos x_4 \sin x_1)/(J^2 J_r^2) + \\
& (6B_m J_p^2 w x_2^2 x_4 \cos x_3 \cos x_4 \sin x_3)/(J J_r^3) - (16J_p^2 w x_2^2 \cos(x_1) \cos x_3 \cos x_4 \sin x_1 \sin x_3)/(J^2 J_r) + \\
& (8J_p^3 w x_2^2 \cos(x_1) \cos x_3 \cos x_4 \sin x_1 \sin x_3)/(J^2 J_r^2) + (2B_m J_p w x_2^2 x_4^2 \cos x_3 \sin x_3 \sin x_4)/(J J_r^2) - \\
& (4G J_p^2 w x_2 \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3 \sin x_4)/(J^2 J_r^2) - (2B_m J_p^2 w x_2^2 x_4^2 \cos x_3 \sin x_3 \sin x_4)/(J J_r^3) - \\
& (8J_p w x_2^2 x_4 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3 \sin x_4)/J^2 - (6B_m J_p w x_2^2 x_4 \cos x_3 \cos x_4 \sin x_3)/(J J_r^2) - \\
& (8J_p^2 w^2 x_2 x_4 \cos x_3 \cos x_4 \sin x_3 \sin x_4)/(J^2 J_r) + (8J_p^3 w^2 x_2 x_4 \cos x_3 \cos x_4 \sin x_3 \sin x_4)/(J^2 J_r^2) + \\
& (4G J_p w x_2 \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3 \sin x_4)/(J^2 J_r) + (2G J_p w x_2 x_4 \cos x_3 \cos x_4 \sin x_1 \sin x_3)/(J^2 J_r) - \\
& (2G J_p^2 w x_2 x_4 \cos x_3 \cos x_4 \sin x_1 \sin x_3)/(J^2 J_r^2) + (16J_p^2 w x_2^2 x_4 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3 \sin x_4)/(J^2 J_r) - \\
& (8J_p^3 w x_2^2 x_4 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3 \sin x_4)/(J^2 J_r^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{34}^{torque}(x) &= (x_2^2 \cos x_3^2)/J_r - B_m^2/J_r^3 - (x_2^2 \sin x_3^2)/J_r - (J_p x_2^2 \cos x_3^2)/J_r^2 + (J_p x_2^2 \sin x_3^2)/J_r^2 - \\
& (J_p w x_2 \sin x_3)/J_r^2 - (4x_2^2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3)/J - (J_p^2 w^2 \cos x_3 \cos x_4)/(J J_r^2) + \\
& (J_p^2 w^2 x_4 \cos x_3 \sin x_4)/(J J_r^2) + (8J_p x_2^2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3)/(J J_r) - \\
& (2J_p w x_2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1)/(J J_r) - (2J_p w x_2 \cos x_3 \cos x_4 \sin x_3)/(J J_r) - \\
& (4J_p^2 x_2^2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3)/(J J_r^2) + (2J_p^2 w x_2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1)/(J J_r^2) + \\
& (2J_p^2 w x_2 \cos x_3 \cos x_4 \sin x_3)/(J J_r^2) + (2J_p w x_2 x_4 \cos x_3 \sin x_3 \sin x_4)/(J J_r) - \\
& (2J_p^2 w x_2 x_4 \cos x_3 \sin x_3 \sin x_4)/(J J_r^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{44}^{torque}(x) &= (B_m^3 J^2 - 2B_m J^2 J_r^2 x_2^2 \cos x_3^2 + 2B_m J^2 J_r^2 x_2^2 \sin x_3^2 - \\
& 2B_m J^2 J_p J_r x_2^2 \sin x_3^2 + 8J J_r^4 x_2^3 \cos(x_1)^2 \cos x_3 \sin x_3 - 2G J J_r^3 x_2 \cos x_3^2 \sin x_1 - \\
& 8J J_r^4 x_2^3 \cos x_3 \sin x_1^2 \sin x_3 + 2G J J_r^3 x_2 \sin x_1 \sin x_3^2 + 4J^2 J_r^3 x_2^2 x_4 \cos x_3 \sin x_3 + \\
& 2B_m J^2 J_p J_r x_2^2 \cos x_3^2 + 4J J_p J_r^3 w x_2^2 \cos(x_1)^2 \cos x_3 - 2J_p^2 J_r^3 w^2 x_4 \cos x_3 \cos x_4^2 \sin x_3 + \\
& 2J_p^3 J_r^2 w^2 x_4 \cos x_3 \cos x_4^2 \sin x_3 - 4J J_p J_r^3 w x_2^2 \cos x_3 \sin x_1^2 - 2J J_p^2 J_r^2 w^2 x_4 \cos x_4 \sin x_3 + \\
& 4J J_p^3 J_r w^3 x_2 \cos x_3^2 \sin x_4 + 4G J_p J_r^3 w \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1^2 - 4J^2 J_p J_r^2 x_2^2 x_4 \cos x_3 \sin x_3 + \\
& G J J_p J_r^2 w \sin x_1 \sin x_3 + J^2 J_p J_r^2 w x_2 x_4 \cos x_3 - 4J J_p^2 J_r^2 w x_2^2 \cos(x_1)^2 \cos x_3 + \\
& 2B_m J J_p^2 J_r w^2 \cos x_3 \cos x_4 + 4J J_p^2 J_r^2 w x_2^2 \cos x_3 \sin x_1^2 - 4G J_p^2 J_r^2 w \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1^2 - \\
& 16J J_p J_r^3 x_2^3 \cos(x_1)^2 \cos x_3 \sin x_3 + J J_p^2 J_r^2 w^2 x_4^2 \sin x_3 \sin x_4 + 2G J J_p J_r^2 x_2 \cos x_3^2 \sin x_1 + \\
& 16J J_p J_r^3 x_2^3 \cos x_3 \sin x_1^2 \sin x_3 - 2G J J_p J_r^2 x_2 \sin x_1 \sin x_3^2 + 8J J_r^4 x_2^2 x_4 \cos(x_1) \cos x_3^2 \sin x_1 - \\
& 16J_r^5 x_2^2 x_4 \cos(x_1)^2 \cos x_3 \sin x_1^2 \sin x_3 - 8J J_r^4 x_2^2 x_4 \cos(x_1) \sin x_1 \sin x_3^2 + \\
& 12G J_r^4 x_2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1^2 \sin x_3 + 2B_m J^2 J_p J_r w x_2 \sin x_3 + 8J J_p^2 J_r^2 x_2^3 \cos(x_1)^2 \cos x_3 \sin x_3 - \\
& 8J J_p^2 J_r^2 x_2^3 \cos x_3 \sin x_1^2 \sin x_3 + 4J J_p J_r^3 w x_2 x_4 \cos x_3^2 \cos x_4 - 4J_p J_r^4 w x_2 x_4 \cos(x_1)^2 \cos x_3 \sin x_1^2 - \\
& 4J J_p J_r^3 w x_2 x_4 \cos x_4 \sin x_3^2 + 2B_m J J_p^2 J_r w^2 x_4^2 \cos x_3 \cos x_4 + 8J J_p^2 J_r^2 x_2^2 x_4 \cos(x_1) \cos x_3^2 \sin x_1 - \\
& 48J_p^2 J_r^3 x_2^2 x_4 \cos(x_1)^2 \cos x_3 \sin x_1^2 \sin x_3 + 16J_p^3 J_r^2 x_2^2 x_4 \cos(x_1)^2 \cos x_3 \sin x_1^2 \sin x_3 - \\
& 12J J_p^3 J_r w^2 x_2^2 \cos x_3^2 \sin x_3 \sin x_4 + 8J J_p J_r^3 w x_2^3 \cos x_3^2 \sin x_3^2 \sin x_4 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8JJ_p^3J_rwx_2^3\cos x_3^2\sin x_3^2\sin x_4 & - & & 8JJ_p^2J_r^2x_2^2x_4\cos(x_1)\sin x_1\sin x_3^2 & + \\
& 12GJ_p^2J_r^2x_2\cos(x_1)\cos x_3\sin x_1^2\sin x_3 & - & & 4JJ_p^2J_r^2wx_2x_4\cos x_3^2\cos x_4 & + \\
& 2JJ_p^3J_rw^3x_2x_4\cos x_3^2\cos x_4 & + & & 8J_p^2J_r^3wx_2x_4\cos(x_1)^2\cos x_3\sin x_1^2 & - \\
& 4J_p^3J_r^2wx_2x_4\cos(x_1)^2\cos x_3\sin x_1^2 & - & & 2J_p^2J_r^3w^2x_4\cos(x_1)\cos x_3\cos x_4\sin x_1 & + \\
& 2J_p^3J_r^2w^2x_4\cos(x_1)\cos x_3\cos x_4\sin x_1 & + & & 4JJ_p^2J_r^2wx_2x_4\cos x_4\sin x_3^2 & - \\
& 2JJ_pJ_r^3wx_2x_4^2\cos x_3^2\sin x_4 + 2JJ_pJ_r^3wx_2x_4^2\sin x_3^2\sin x_4 + 2GJ_pJ_r^3w\cos x_3\cos x_4\sin x_1\sin x_3 & + & & & + \\
& 12JJ_p^2J_r^2w^2x_2^2\cos x_3^2\sin x_3\sin x_4 & - & & 16JJ_p^2J_r^2wx_2^3\cos x_3^2\sin x_3^2\sin x_4 & + \\
& 2JJ_p^2J_r^2wx_2x_4^2\cos x_3^2\sin x_4 & - & & 2J_p^2J_r^3w^2x_4^2\cos(x_1)\cos x_3\sin x_1\sin x_4 & + \\
& 2J_p^3J_r^2w^2x_4^2\cos(x_1)\cos x_3\sin x_1\sin x_4 & + & & 2J_p^2J_r^3w^2x_4^2\cos x_3\cos x_4\sin x_3\sin x_4 & - \\
& 2J_p^3J_r^2w^2x_4^2\cos x_3\cos x_4\sin x_3\sin x_4 & - & & 16JJ_pJ_r^3x_2^2x_4\cos(x_1)\cos x_3^2\sin x_1 & + \\
& 48J_pJ_r^4x_2^2x_4\cos(x_1)^2\cos x_3\sin x_1^2\sin x_3 & + & & 2B_mJJ_p^2J_rw^2x_4\cos x_3\sin x_4 & - \\
& 2JJ_p^2J_r^2wx_2x_4^2\sin x_3^2\sin x_4 & + & & 8B_mJJ_r^3x_2^2\cos(x_1)\cos x_3\sin x_1\sin x_3 & - \\
& 2GJ_p^2J_r^2w\cos x_3\cos x_4\sin x_1\sin x_3 & + & & 16JJ_pJ_r^3x_2^2x_4\cos(x_1)\sin x_1\sin x_3^2 & - \\
& 24GJ_pJ_r^3x_2\cos(x_1)\cos x_3\sin x_1^2\sin x_3 & + & & 4JJ_p^2J_r^2wx_2x_4\cos(x_1)\sin x_1\sin x_3 & + \\
& 6JJ_p^2J_r^2w^2x_2^2x_4\cos x_3^2\cos x_4\sin x_3 & - & & 8JJ_p^2J_r^2wx_2^3x_4\cos x_3^2\cos x_4\sin x_3^2 & - \\
& 2GJ_pJ_r^3wx_4\cos x_3\sin x_1\sin x_3\sin x_4 & - & & 16B_mJJ_pJ_r^2x_2^2\cos(x_1)\cos x_3\sin x_1\sin x_3 & + \\
& 8B_mJJ_p^2J_rx_2^2\cos(x_1)\cos x_3\sin x_1\sin x_3 & + & & 4B_mJJ_pJ_r^2wx_2\cos(x_1)\cos x_3\sin x_1 & - \\
& 4B_mJJ_p^2J_rwx_2\cos(x_1)\cos x_3\sin x_1 & + & & 4B_mJJ_pJ_r^2wx_2\cos x_3\cos x_4\sin x_3 & - \\
& 4B_mJJ_p^2J_rwx_2\cos x_3\cos x_4\sin x_3 & + & & 2GJ_p^2J_r^2wx_4\cos x_3\sin x_1\sin x_3\sin x_4 & - \\
& 4JJ_pJ_r^3wx_2x_4\cos(x_1)\sin x_1\sin x_3 & - & & 6JJ_p^3J_rw^2x_2^2x_4\cos x_3^2\cos x_4\sin x_3 & + \\
& 4JJ_pJ_r^3wx_2^3x_4\cos x_3^2\cos x_4\sin x_3^2 & + & & 4JJ_p^3J_rwx_2^3x_4\cos x_3^2\cos x_4\sin x_3^2 & - \\
& 12J_pJ_r^4wx_2x_4\cos(x_1)\cos x_3\cos x_4\sin x_1\sin x_3 & + & & 4B_mJJ_pJ_r^2wx_2x_4^2\cos x_3\cos x_4\sin x_3 & - \\
& 4B_mJJ_p^2J_rwx_2x_4^2\cos x_3\cos x_4\sin x_3 & + & & 24J_p^2J_r^3wx_2x_4\cos(x_1)\cos x_3\cos x_4\sin x_1\sin x_3 & - \\
& 12J_p^3J_r^2wx_2x_4\cos(x_1)\cos x_3\cos x_4\sin x_1\sin x_3 & + & & 4B_mJJ_pJ_r^2wx_2x_4\cos x_3\sin x_3\sin x_4 & - \\
& 4B_mJJ_p^2J_rwx_2x_4\cos x_3\sin x_3\sin x_4)/(J^2J_r^4) & & & &
\end{aligned}$$

B. Macierz obserwowalności modelu pełnego sterowanego napięciem

Wzory na elementy macierzy sterowalności modelu pełnego sterowanego napięciem przedstawione w tym dodatku uzyskane zostały przy użyciu Toolboxu Symbolic pakietu MATLAB.

$$\begin{aligned}
q_{23}^{voltage}(x) &= (2J_r x_2^2 \cos(x_1)^2)/(JL) - (2J_p x_2^2 \cos(x_1)^2)/(JL) + (2J_p x_2^2 \sin x_1^2)/(JL) - \\
&(2J_r x_2^2 \sin x_1^2)/(JL) - (2GJ_p \cos(x_1) \sin x_1^2)/(J^2L) + (2GJ_r \cos(x_1) \sin x_1^2)/(J^2L) + \\
&(J_p R w \cos x_3)/(JL^2) - (J_p w x_2^2 \cos x_3 \sin x_3^2)/(JL) - (2J_p R x_2 \cos(x_1) \sin x_1)/(JL^2) + \\
&(2J_r R x_2 \cos(x_1) \sin x_1)/(JL^2) + (J_p^2 w^2 x_2 \cos x_3 \sin x_3)/(J J_r L) + (J_p^2 w x_2^2 \cos x_3 \sin x_3^2)/(J J_r L) \\
q_{33}^{voltage}(x) &= (B_m R)/(J_r L^2) - (K m R)/(J_r L^2) - (B_m x_2^2 \cos x_3^2)/(J_r L) + \\
&(K m x_2^2 \cos x_3^2)/(J_r L) + (B_m x_2^2 \sin x_3^2)/(J_r L) - (K m x_2^2 \sin x_3^2)/(J_r L) + \\
&(J_p^2 w^2 \cos x_3^2)/(J J_r L) + (B_m J_p x_2^2 \cos x_3^2)/(J_r^2 L) - (J_p K m x_2^2 \cos x_3^2)/(J_r^2 L) - \\
&(B_m J_p x_2^2 \sin x_3^2)/(J_r^2 L) + (J_p K m x_2^2 \sin x_3^2)/(J_r^2 L) - (2J_p w x_2 \cos x_3^2 \sin x_3)/(JL) - \\
&(B_m J_p w x_2 \sin x_3)/(J_r^2 L) + (J_p K m w x_2 \sin x_3)/(J_r^2 L) + (2J_p^2 w x_2 \cos x_3^2 \sin x_3)/(J J_r L) + \\
&(8J_p x_2^2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3)/(JL) - (4J_r x_2^2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3)/(JL) + \\
&(2J_p w x_2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1)/(JL) - (4J_p^2 x_2^2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3)/(J J_r L) - \\
&(2J_p^2 w x_2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1)/(J J_r L) \\
q_{14}^{voltage}(x) &= (4J_p x_2^2 \cos(x_1)^2)/(JL) - (4J_r x_2^2 \cos(x_1)^2)/(JL) - (4J_p x_2^2 \sin x_1^2)/(JL) + \\
&(4J_r x_2^2 \sin x_1^2)/(JL) + (4GJ_p \cos(x_1) \sin x_1^2)/(J^2L) - (4GJ_r \cos(x_1) \sin x_1^2)/(J^2L) - \\
&(J_p R w \cos x_3)/(JL^2) + (2J_p w x_2^2 \cos x_3 \sin x_3^2)/(JL) + (2J_p R x_2 \cos(x_1) \sin x_1)/(JL^2) - \\
&(2J_r R x_2 \cos(x_1) \sin x_1)/(JL^2) + (4J_p^2 x_2 x_4 \cos(x_1)^2 \sin x_1^2)/(J^2L) + \\
&(4J_r^2 x_2 x_4 \cos(x_1)^2 \sin x_1^2)/(J^2L) - (2J_p^2 w^2 x_2 \cos x_3 \sin x_3)/(J J_r L) - \\
&(2J_p^2 w x_2^2 \cos x_3 \sin x_3^2)/(J J_r L) - (8J_p J_r x_2 x_4 \cos(x_1)^2 \sin x_1^2)/(J^2L) - \\
&(B_m J_p w x_4 \sin x_3)/(J J_r L) + (J_p K m w x_4 \sin x_3)/(J J_r L) - (2J_p^2 w x_4 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1)/(J^2L) + \\
&(2J_p J_r w x_4 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1)/(J^2L) \\
q_{24}^{voltage}(x) &= (J_p R^2 w \cos x_3)/(JL^3) + (6GJ_p x_2 \sin x_1^3)/(J^2L) - \\
&(6GJ_r x_2 \sin x_1^3)/(J^2L) - (2J_p R x_2^2 \cos(x_1)^2)/(JL^2) + (2J_r R x_2^2 \cos(x_1)^2)/(JL^2) + \\
&(2J_p R x_2^2 \sin x_1^2)/(JL^2) - (2J_r R x_2^2 \sin x_1^2)/(JL^2) + (8J_p x_2^3 \cos(x_1) \sin x_1)/(JL) - \\
&(8J_r x_2^3 \cos(x_1) \sin x_1)/(JL) + (J_p w x_2^4 \cos x_3 \sin x_3^4)/(JL) + (GJ_p w \cos(x_1) \cos x_3)/(J^2L) + \\
&(2B_m K e x_2 \cos(x_1) \sin x_1)/(JL^2) - (2K e K m x_2 \cos(x_1) \sin x_1)/(JL^2) + \\
&(4GJ_p^2 x_4 \cos(x_1)^2 \sin x_1^3)/(J^3L) + (4GJ_r^2 x_4 \cos(x_1)^2 \sin x_1^3)/(J^3L) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2GJ_p R \cos(x_1) \sin x_1^2)/(J^2 L^2) & + & & (2GJ_r R \cos(x_1) \sin x_1^2)/(J^2 L^2) & - \\
& (2J_p w x_2^4 \cos x_3^3 \sin x_3^2)/(JL) & + & & (8J_p^2 x_2^2 x_4 \cos(x_1) \sin x_1^3)/(J^2 L) & - \\
& (8J_p^2 x_2^2 x_4 \cos(x_1)^3 \sin x_1)/(J^2 L) & + & & (8J_r^2 x_2^2 x_4 \cos(x_1) \sin x_1^3)/(J^2 L) & - \\
& (8J_r^2 x_2^2 x_4 \cos(x_1)^3 \sin x_1)/(J^2 L) & - & & (10GJ_p x_2 \cos(x_1)^2 \sin x_1)/(J^2 L) & + \\
& (10GJ_r x_2 \cos(x_1)^2 \sin x_1)/(J^2 L) & - & & (2J_p R^2 x_2 \cos(x_1) \sin x_1)/(JL^3) & + \\
& (2J_r R^2 x_2 \cos(x_1) \sin x_1)/(JL^3) - (J_p^3 w^3 x_2^2 \cos x_3^3)/(J J_r^2 L) - (2J_p^2 w x_2^4 \cos x_3 \sin x_3^4)/(J J_r L) & - & & & - \\
& (2J_p^3 w^3 x_4 \cos x_3^2 \sin x_3)/(J^2 J_r L) & + & & (J_p^3 w x_2^4 \cos x_3 \sin x_3^4)/(J J_r^2 L) & + \\
& (B_m J_p K e w \cos x_3)/(J J_r L^2) - (8GJ_p J_r x_4 \cos(x_1)^2 \sin x_1^3)/(J^3 L) - (J_p K e K m w \cos x_3)/(J J_r L^2) & + & & & + \\
& (4J_p^2 w^2 x_2 x_4 \cos x_3^2 \sin x_3^2)/(J^2 L) & - & & (16J_p J_r x_2^2 x_4 \cos(x_1) \sin x_1^3)/(J^2 L) & + \\
& (16J_p J_r x_2^2 x_4 \cos(x_1)^3 \sin x_1)/(J^2 L) & - & & (J_p R w x_2^2 \cos x_3 \sin x_3^2)/(JL^2) & + \\
& (6J_p^2 w x_2 x_4 \cos(x_1)^2 \cos x_3)/(J^2 L) & - & & (2J_p^2 w^2 x_2^3 \cos x_3 \sin x_3^3)/(J J_r L) & + \\
& (3J_p^2 w^2 x_2^3 \cos x_3^3 \sin x_3)/(J J_r L) & + & & (4J_p^2 w x_2^4 \cos x_3^3 \sin x_3^2)/(J J_r L) & + \\
& (J_p^3 w^3 x_2^2 \cos x_3 \sin x_3^2)/(J J_r^2 L) & + & & (2J_p^3 w^2 x_2^3 \cos x_3 \sin x_3^3)/(J J_r^2 L) & - \\
& (3J_p^3 w^2 x_2^3 \cos x_3^3 \sin x_3)/(J J_r^2 L) & - & & (2J_p^3 w x_2^4 \cos x_3^3 \sin x_3^2)/(J J_r^2 L) & - \\
& (6J_p^2 w x_2 x_4 \cos x_3 \sin x_1^2)/(J^2 L) & + & & (2J_p K m w x_2^2 x_4 \sin x_3^3)/(J J_r L) & - \\
& (2GJ_p w x_2 \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3^2)/(J^2 L) & - & & (B_m J_p^2 w^2 x_2 x_4 \cos x_3^2)/(J J_r^2 L) & - \\
& (4J_p^3 w^2 x_2 x_4 \cos x_3^2 \sin x_3^2)/(J^2 J_r L) & + & & (J_p^2 K m w^2 x_2 x_4 \cos x_3^2)/(J J_r^2 L) & + \\
& (2B_m J_p^2 w^2 x_2 x_4 \sin x_3^2)/(J J_r^2 L) & + & & (2B_m J_p^2 w x_2^2 x_4 \sin x_3^3)/(J J_r^2 L) & - \\
& (2J_p^2 K m w^2 x_2 x_4 \sin x_3^2)/(J J_r^2 L) & - & & (2J_p^2 K m w x_2^2 x_4 \sin x_3^3)/(J J_r^2 L) & + \\
& (J_p^2 R w^2 x_2 \cos x_3 \sin x_3)/(J J_r L^2) & - & & (2B_m J_p K e x_2 \cos(x_1) \sin x_1)/(J J_r L^2) & + \\
& (2J_p K e K m x_2 \cos(x_1) \sin x_1)/(J J_r L^2) & - & & (6J_p J_r w x_2 x_4 \cos(x_1)^2 \cos x_3)/(J^2 L) & + \\
& (J_p^2 R w x_2^2 \cos x_3 \sin x_3^2)/(J J_r L^2) & + & & (6J_p J_r w x_2 x_4 \cos x_3 \sin x_1^2)/(J^2 L) & + \\
& (GJ_p^2 w^2 \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3)/(J^2 J_r L) & - & & (2B_m J_p w x_2^2 x_4 \sin x_3^3)/(J J_r L) & - \\
& (12J_p^2 w x_2^2 x_4 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3^2)/(J^2 L) & - & & (3B_m J_p^2 w x_2^2 x_4 \cos x_3^2 \sin x_3)/(J J_r^2 L) & + \\
& (3J_p^2 K m w x_2^2 x_4 \cos x_3^2 \sin x_3)/(J J_r^2 L) & + & & (2GJ_p^2 w x_2 \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3^2)/(J^2 J_r L) & - \\
& (2J_p^2 w^2 x_2 x_4 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3)/(J^2 L) & + & & (3B_m J_p w x_2^2 x_4 \cos x_3^2 \sin x_3)/(J J_r L) & - \\
& (3J_p K m w x_2^2 x_4 \cos x_3^2 \sin x_3)/(J J_r L) & + & & (2J_p^3 w^2 x_2 x_4 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3)/(J^2 J_r L) & + \\
& (6J_p^3 w x_2^2 x_4 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3^2)/(J^2 J_r L) & + & & (6J_p J_r w x_2^2 x_4 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3^2)/(J^2 L) & +
\end{aligned}$$

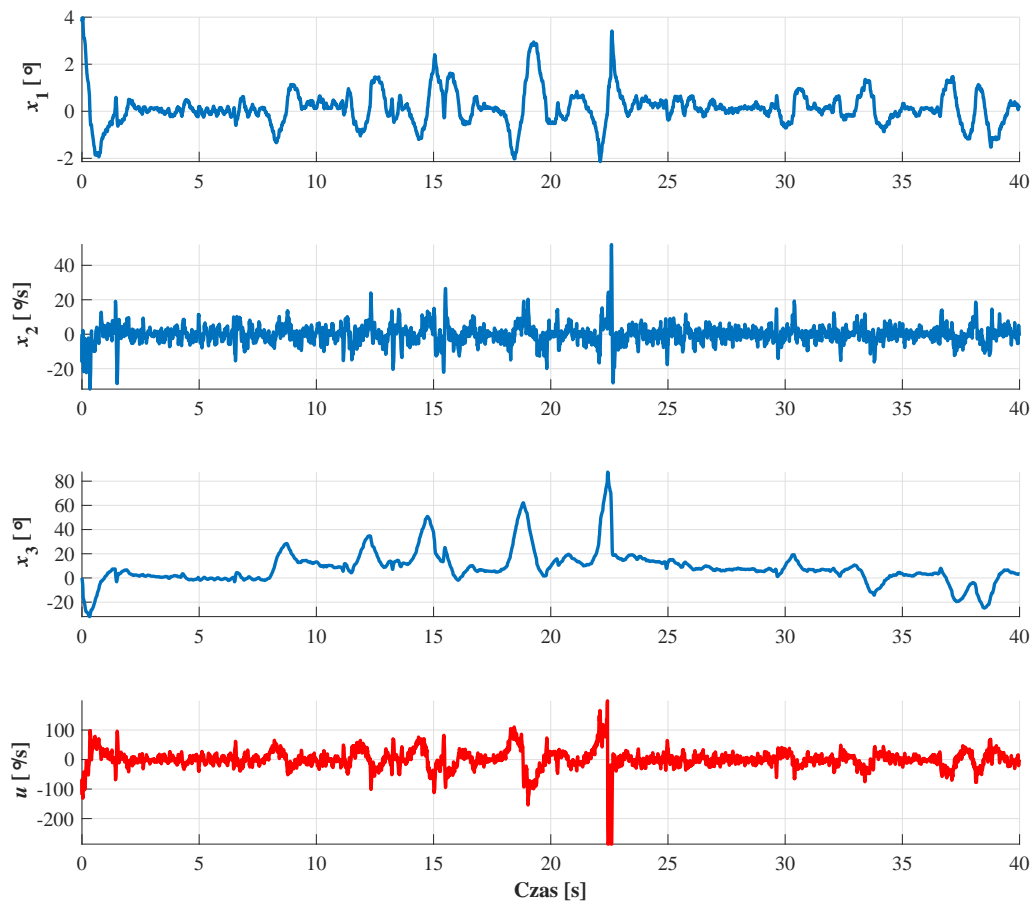
$$\begin{aligned}
q_{34}^{voltage}(x) & = & (B_m^2 K e)/(J_r^2 L^2) & + & (B_m R^2)/(J_r L^3) & + & (K e K m^2)/(J_r^2 L^2) & - \\
& (K m R^2)/(J_r L^3) & + & (B_m x_2^4 \cos x_3^4)/(J_r L) & - & (K m x_2^4 \cos x_3^4)/(J_r L) & + & (B_m x_2^4 \sin x_3^4)/(J_r L) & - \\
& (K m x_2^4 \sin x_3^4)/(J_r L) & - & (2B_m K e K m)/(J_r^2 L^2) & - & (2B_m J_p x_2^4 \cos x_3^4)/(J_r^2 L) & + & \\
& (2B_m x_2^4 \cos x_3^2 \sin x_3^2)/(J_r L) & - & (B_m R x_2^2 \cos x_3^2)/(J_r L^2) & + & (2J_p K m x_2^4 \cos x_3^4)/(J_r^2 L) & - & \\
& (2K m x_2^4 \cos x_3^2 \sin x_3^2)/(J_r L) & - & (2B_m J_p x_2^4 \sin x_3^4)/(J_r^2 L) & + & (K m R x_2^2 \cos x_3^2)/(J_r L^2) & + & \\
& (B_m R x_2^2 \sin x_3^2)/(J_r L^2) & + & (2J_p K m x_2^4 \sin x_3^4)/(J_r^2 L) & - & (K m R x_2^2 \sin x_3^2)/(J_r L^2) & + & \\
& (B_m J_p^2 x_2^4 \cos x_3^4)/(J_r^3 L) & - & (J_p^2 K m x_2^4 \cos x_3^4)/(J_r^3 L) & + & (B_m J_p^2 x_2^4 \sin x_3^4)/(J_r^3 L) & - & \\
& (J_p^2 K m x_2^4 \sin x_3^4)/(J_r^3 L) & - & (2J_p^2 K m x_2^4 \cos x_3^2 \sin x_3^2)/(J_r^3 L) & + & (2B_m J_p^2 w x_2^3 \sin x_3^3)/(J_r^3 L) & - & \\
& (2J_p^2 K m w x_2^3 \sin x_3^3)/(J_r^3 L) & + & (4J_p w x_2^2 \cos(x_1)^2 \cos x_3)/(JL) & + & (J_p^2 R w^2 \cos x_3^2)/(J J_r L^2) & - & \\
& (4B_m^2 x_2^2 x_4 \cos x_3 \sin x_3)/(J_r^2 L) & - & (4J_p w x_2^2 \cos x_3 \sin x_1^2)/(JL) & - & (4K m^2 x_2^2 x_4 \cos x_3 \sin x_3)/(J_r^2 L) & + &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (B_m J_p^2 w^2 x_2^2 \cos x_3^2)/(J_r^3 L) - (J_p^2 K m w^2 x_2^2 \cos x_3^2)/(J_r^3 L) + (B_m J_p^2 w^2 x_2^2 \sin x_3^2)/(J_r^3 L) - \\
& (4B_m J_p x_2^4 \cos x_3^2 \sin x_3^2)/(J_r^2 L) - (J_p^2 K m w^2 x_2^2 \sin x_3^2)/(J_r^3 L) + (B_m J_p R x_2^2 \cos x_3^2)/(J_r^2 L^2) + \\
& (4J_p K m x_2^4 \cos x_3^2 \sin x_3^2)/(J_r^2 L) - (J_p K m R x_2^2 \cos x_3^2)/(J_r^2 L^2) - (B_m J_p R x_2^2 \sin x_3^2)/(J_r^2 L^2) + \\
& (J_p K m R x_2^2 \sin x_3^2)/(J_r^2 L^2) + (4J_p w x_2^3 \cos x_3^2 \sin x_3^3)/(J L) + (2J_p^2 w^2 x_4 \cos x_3^3 \sin x_3)/(J^2 L) + \\
& (16J_p x_2^3 \cos(x_1)^2 \cos x_3 \sin x_3)/(J L) - (8J_r x_2^3 \cos(x_1)^2 \cos x_3 \sin x_3)/(J L) - \\
& (2B_m J_p w x_2^3 \sin x_3^3)/(J_r^2 L) + (2J_p K m w x_2^3 \sin x_3^3)/(J_r^2 L) - (16J_p x_2^3 \cos x_3 \sin x_1^2 \sin x_3)/(J L) + \\
& (8J_r x_2^3 \cos x_3 \sin x_1^2 \sin x_3)/(J L) + (J_p^2 w^2 x_2^2 \cos x_3^4)/(J J_r L) - (J_p^3 w^2 x_2^2 \cos x_3^4)/(J J_r^2 L) + \\
& (2B_m J_p^2 x_2^4 \cos x_3^2 \sin x_3^2)/(J_r^3 L) + (3B_m J_p^2 w x_2^3 \cos x_3^2 \sin x_3)/(J_r^3 L) - \\
& (3J_p^2 K m w x_2^3 \cos x_3^2 \sin x_3)/(J_r^3 L) - (6J_p^2 w^2 x_2^2 \cos x_3^2 \sin x_3^2)/(J J_r L) + \\
& (6J_p^3 w^2 x_2^2 \cos x_3^2 \sin x_3^2)/(J J_r^2 L) + (8B_m x_2^2 x_4 \cos(x_1) \cos x_3^2 \sin x_1)/(J L) + \\
& (2J_p w x_2^3 \cos(x_1) \cos x_3^3 \sin x_1)/(J L) - (8K m x_2^2 x_4 \cos(x_1) \cos x_3^2 \sin x_1)/(J L) - \\
& (8B_m x_2^2 x_4 \cos(x_1) \sin x_1 \sin x_3^2)/(J L) + (8B_m K m x_2^2 x_4 \cos x_3 \sin x_3)/(J_r^2 L) + \\
& (8K m x_2^2 x_4 \cos(x_1) \sin x_1 \sin x_3^2)/(J L) - (2J_p R w x_2 \cos x_3^2 \sin x_3)/(J L^2) - \\
& (4J_p^2 w x_2^2 \cos(x_1)^2 \cos x_3)/(J J_r L) - (B_m J_p R w x_2 \sin x_3)/(J_r^2 L^2) + (J_p K m R w x_2 \sin x_3)/(J_r^2 L^2) + \\
& (4J_p^2 w x_2^2 \cos x_3 \sin x_1^2)/(J J_r L) + (2J_p^3 w^3 x_2 \cos x_3^2 \sin x_3)/(J J_r^2 L) - \\
& (2J_p^3 w^2 x_4 \cos x_3^3 \sin x_3)/(J^2 J_r L) - (2B_m G x_2 \cos x_3^2 \sin x_1)/(J J_r L) + \\
& (2G K m x_2 \cos x_3^2 \sin x_1)/(J J_r L) + (2B_m G x_2 \sin x_1 \sin x_3^2)/(J J_r L) - \\
& (2G K m x_2 \sin x_1 \sin x_3^2)/(J J_r L) - (2J_p^2 w^2 x_4 \cos(x_1) \cos x_3^2 \sin x_1)/(J^2 L) - \\
& (3B_m J_p w x_2^3 \cos x_3^2 \sin x_3)/(J_r^2 L) + (4B_m^2 J_p x_2^2 x_4 \cos x_3 \sin x_3)/(J_r^3 L) + \\
& (4G J_p w \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1^2)/(J^2 L) + (3J_p K m w x_2^3 \cos x_3^2 \sin x_3)/(J_r^2 L) + \\
& (4J_p K m^2 x_2^2 x_4 \cos x_3 \sin x_3)/(J_r^3 L) - (2G J_p w \cos x_3^2 \sin x_1 \sin x_3)/(J^2 L) - \\
& (8J_p^2 w x_2^3 \cos x_3^2 \sin x_3^3)/(J J_r L) + (4J_p^3 w x_2^3 \cos x_3^2 \sin x_3^3)/(J J_r^2 L) - \\
& (8J_p^2 x_2^3 \cos(x_1)^2 \cos x_3 \sin x_3)/(J J_r L) + (B_m^2 J_p w x_2 x_4 \cos x_3)/(J_r^3 L) + \\
& (J_p K m^2 w x_2 x_4 \cos x_3)/(J_r^3 L) + (8J_p^2 x_2^3 \cos x_3 \sin x_1^2 \sin x_3)/(J J_r L) + \\
& (8J_p^2 w x_2 x_4 \cos(x_1)^2 \cos x_3 \sin x_1^2)/(J^2 L) - (4J_p^2 w x_2^3 \cos(x_1) \cos x_3^3 \sin x_1)/(J J_r L) + \\
& (2J_p^3 w x_2^3 \cos(x_1) \cos x_3^3 \sin x_1)/(J J_r^2 L) + (2J_p^3 w^2 x_4 \cos(x_1) \cos x_3^2 \sin x_1)/(J^2 J_r L) + \\
& (3B_m J_p^2 w^2 x_4 \cos x_3 \sin x_3)/(J J_r^2 L) - (3J_p^2 K m w^2 x_4 \cos x_3 \sin x_3)/(J J_r^2 L) + \\
& (2J_p^2 R w x_2 \cos x_3^2 \sin x_3)/(J J_r L^2) - (B_m G J_p w \sin x_1 \sin x_3)/(J J_r^2 L) + \\
& (G J_p K m w \sin x_1 \sin x_3)/(J J_r^2 L) + (4B_m J_p w x_2 x_4 \cos x_3^3)/(J J_r L) - \\
& (4J_p K m w x_2 x_4 \cos x_3^3)/(J J_r L) - (8B_m J_p K m x_2^2 x_4 \cos x_3 \sin x_3)/(J_r^3 L) + \\
& (24G J_p x_2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1^2 \sin x_3)/(J^2 L) - (12G J_r x_2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1^2 \sin x_3)/(J^2 L) + \\
& (8J_p R x_2^2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3)/(J L^2) - (4J_r R x_2^2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3)/(J L^2) - \\
& (4G J_p^2 w \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1^2)/(J^2 J_r L) - (2B_m J_p K m w x_2 x_4 \cos x_3)/(J_r^3 L) + \\
& (2B_m G J_p x_2 \cos x_3^2 \sin x_1)/(J J_r^2 L) + (2G J_p^2 w \cos x_3^2 \sin x_1 \sin x_3)/(J^2 J_r L) - \\
& (2G J_p K m x_2 \cos x_3^2 \sin x_1)/(J J_r^2 L) - (2B_m G J_p x_2 \sin x_1 \sin x_3^2)/(J J_r^2 L) + \\
& (2J_p R w x_2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1)/(J L^2) + (2G J_p K m x_2 \sin x_1 \sin x_3^2)/(J J_r^2 L) - \\
& (4B_m J_p^2 w x_2 x_4 \cos x_3^3)/(J J_r^2 L) + (4J_p^2 K m w x_2 x_4 \cos x_3^3)/(J J_r^2 L) + \\
& (48J_p^2 x_2^2 x_4 \cos(x_1)^2 \cos x_3 \sin x_1^2 \sin x_3)/(J^2 L) + (16J_r^2 x_2^2 x_4 \cos(x_1)^2 \cos x_3 \sin x_1^2 \sin x_3)/(J^2 L) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (4J_p J_r w x_2 x_4 \cos(x_1)^2 \cos x_3 \sin x_1^2)/(J^2 L) - (16B_m J_p x_2^2 x_4 \cos(x_1) \cos x_3^2 \sin x_1)/(J J_r L) + \\
& (16J_p K m x_2^2 x_4 \cos(x_1) \cos x_3^2 \sin x_1)/(J J_r L) + (16B_m J_p x_2^2 x_4 \cos(x_1) \sin x_1 \sin x_3^2)/(J J_r L) - \\
& (16J_p K m x_2^2 x_4 \cos(x_1) \sin x_1 \sin x_3^2)/(J J_r L) - (6B_m J_p w x_2 x_4 \cos x_3 \sin x_3^2)/(J J_r L) + \\
& (6J_p K m w x_2 x_4 \cos x_3 \sin x_3^2)/(J J_r L) + (8B_m J_p^2 x_2^2 x_4 \cos(x_1) \cos x_3^2 \sin x_1)/(J J_r^2 L) - \\
& (16J_p^3 x_2^2 x_4 \cos(x_1)^2 \cos x_3 \sin x_1^2 \sin x_3)/(J^2 J_r L) - (8J_p^2 K m x_2^2 x_4 \cos(x_1) \cos x_3^2 \sin x_1)/(J J_r^2 L) - \\
& (8B_m J_p^2 x_2^2 x_4 \cos(x_1) \sin x_1 \sin x_3^2)/(J J_r^2 L) - (24J_p^2 w x_2 x_4 \cos(x_1) \cos x_3^2 \sin x_1 \sin x_3)/(J^2 L) - \\
& (12G J_p^2 x_2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1^2 \sin x_3)/(J^2 J_r L) + (8J_p^2 K m x_2^2 x_4 \cos(x_1) \sin x_1 \sin x_3^2)/(J J_r^2 L) - \\
& (4J_p^2 R x_2^2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3)/(J J_r L^2) - (4J_p^3 w x_2 x_4 \cos(x_1)^2 \cos x_3 \sin x_1^2)/(J^2 J_r L) + \\
& (6B_m J_p^2 w x_2 x_4 \cos x_3 \sin x_3^2)/(J J_r^2 L) - (6J_p^2 K m w x_2 x_4 \cos x_3 \sin x_3^2)/(J J_r^2 L) - \\
& (48J_p J_r x_2^2 x_4 \cos(x_1)^2 \cos x_3 \sin x_1^2 \sin x_3)/(J^2 L) - (2J_p^2 R w x_2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1)/(J J_r L^2) + \\
& (4B_m J_p w x_2 x_4 \cos(x_1) \sin x_1 \sin x_3)/(J J_r L) - (4J_p K m w x_2 x_4 \cos(x_1) \sin x_1 \sin x_3)/(J J_r L) + \\
& (12J_p^3 w x_2 x_4 \cos(x_1) \cos x_3^2 \sin x_1 \sin x_3)/(J^2 J_r L) - (4B_m J_p^2 w x_2 x_4 \cos(x_1) \sin x_1 \sin x_3)/(J J_r^2 L) + \\
& (4J_p^2 K m w x_2 x_4 \cos(x_1) \sin x_1 \sin x_3)/(J J_r^2 L) + (12J_p J_r w x_2 x_4 \cos(x_1) \cos x_3^2 \sin x_1 \sin x_3)/(J^2 L) \\
& \quad \overset{voltage}{q_{44}}(x) = R^3/L^4 + (2B_m K e R)/(J_r L^3) - (2K e K m R)/(J_r L^3) - \\
& (B_m K e x_2^2 \cos x_3^2)/(J_r L^2) + (K e K m x_2^2 \cos x_3^2)/(J_r L^2) + (B_m K e x_2^2 \sin x_3^2)/(J_r L^2) - \\
& (K e K m x_2^2 \sin x_3^2)/(J_r L^2) + (J_p^2 K e w^2 \cos x_3^2)/(J J_r L^2) + (B_m J_p K e x_2^2 \cos x_3^2)/(J_r^2 L^2) - \\
& (J_p K e K m x_2^2 \cos x_3^2)/(J_r^2 L^2) - (B_m J_p K e x_2^2 \sin x_3^2)/(J_r^2 L^2) + (J_p K e K m x_2^2 \sin x_3^2)/(J_r^2 L^2) - \\
& (2J_p K e w x_2 \cos x_3^2 \sin x_3)/(J L^2) - (B_m J_p K e w x_2 \sin x_3)/(J_r^2 L^2) + \\
& (J_p K e K m w x_2 \sin x_3)/(J_r^2 L^2) + (2J_p^2 K e w x_2 \cos x_3^2 \sin x_3)/(J J_r L^2) + \\
& (8J_p K e x_2^2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3)/(J L^2) - (4J_r K e x_2^2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3)/(J L^2) + \\
& (2J_p K e w x_2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1)/(J L^2) - (4J_p^2 K e x_2^2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1 \sin x_3)/(J J_r L^2) - \\
& (2J_p^2 K e w x_2 \cos(x_1) \cos x_3 \sin x_1)/(J J_r L^2)
\end{aligned}$$

C. Regulator PD_{cos} przy obecności zakłóceń - rezultaty eksperymentalne

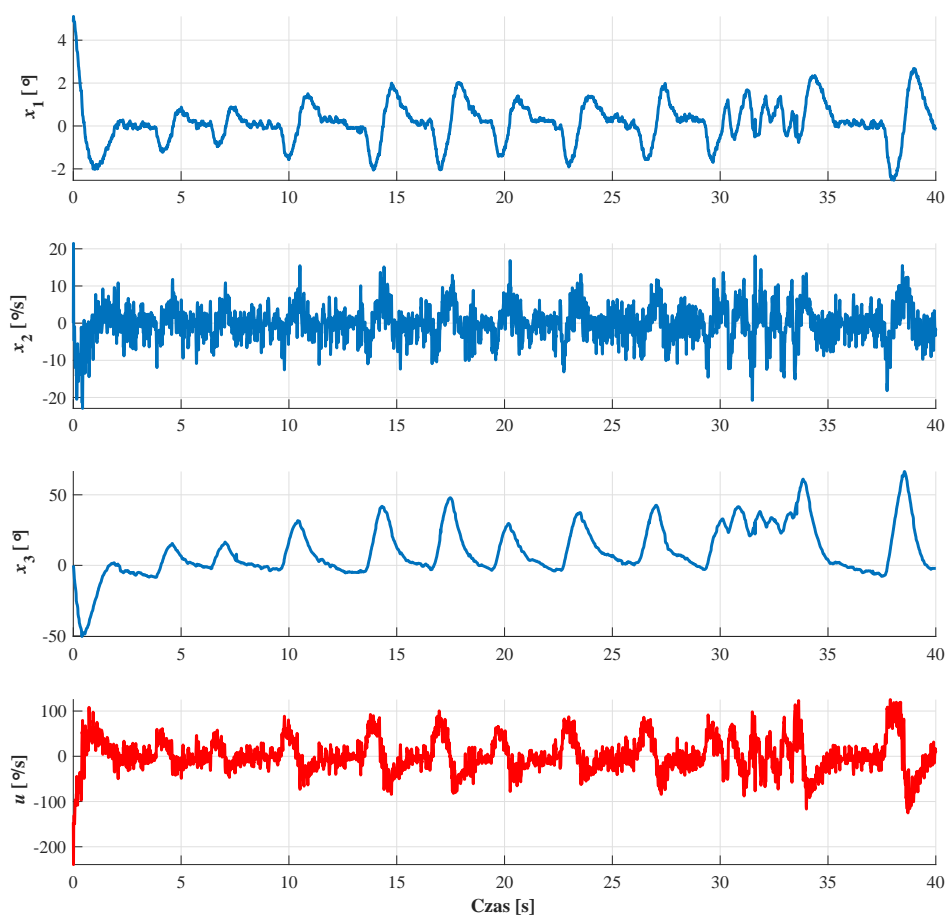
Na rysunku C.1 rzedstawiono wykres przebiegu zmiennych stanu i sterowania dla algorytmu PD_{cos} przy obecności zakłóceń realizowanych jako seria ręcznych wypchnięć roweru ze stanu równowagi.



Rys. C.1. Działanie regulatora z linearyzującym sprzężeniem zwrotnym przy ręcznym wytrącaniu z punktu równowagi.

D. Linearyzujące sprzężenie zwrotne przy obecności zakłóceń - rezultaty eksperymentalne

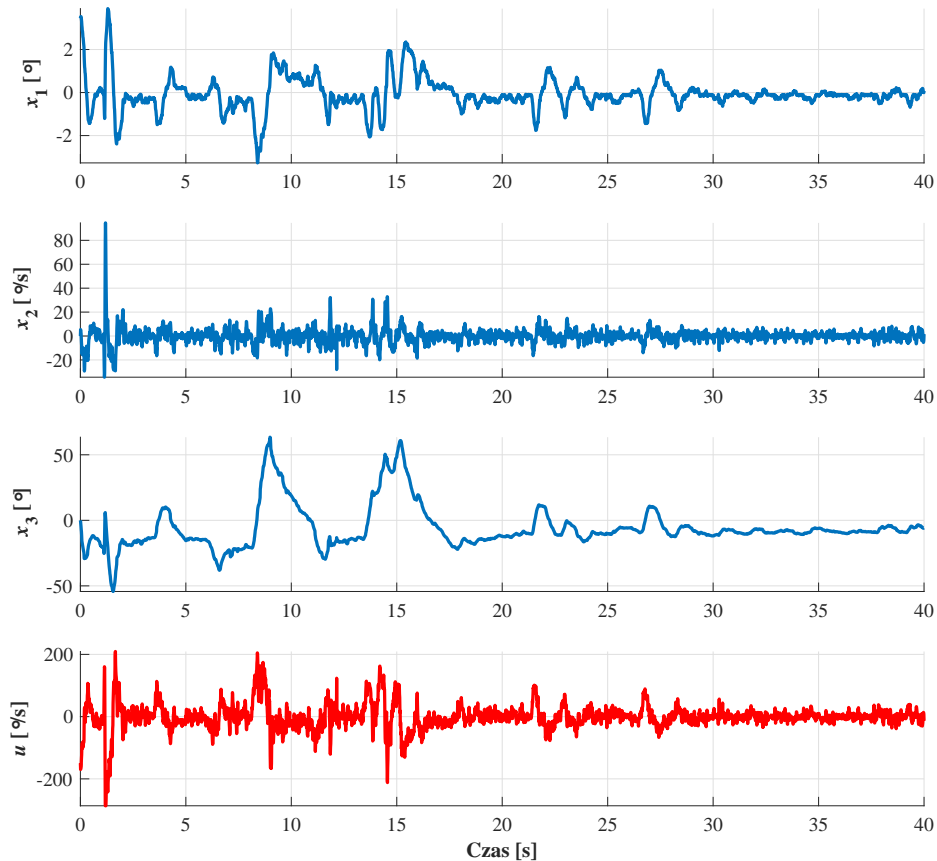
Na rysunku D.1 przedstawiono wykres przebiegu zmiennych stanu i sterowania dla algorytmu z linearyzującym sprzężeniem zwrotnym przy obecności zakłóceń realizowanych jako seria ręcznych wypchnięć roweru ze stanu równowagi.



Rys. D.1. Działanie regulatora z linearyzującym sprzężeniem zwrotnym przy ręcznym wytrącaniu z punktu równowagi.

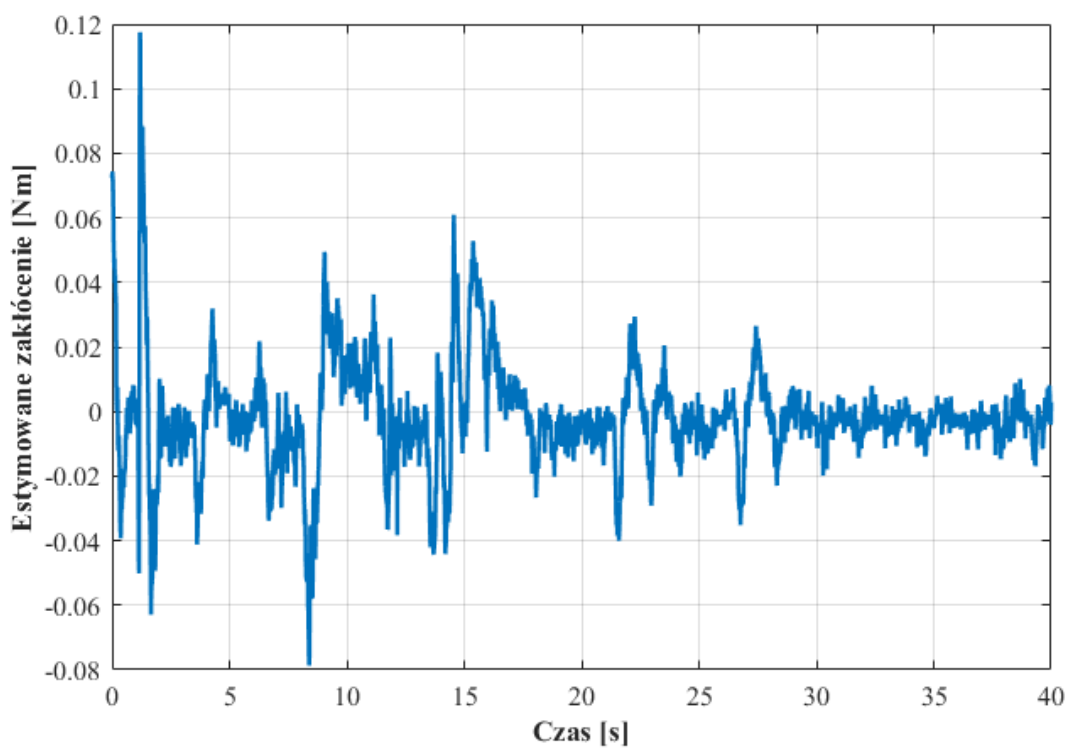
E. Regulator NDOBRC przy obecności zakłóceń - rezultaty eksperymentalne

Na rysunku E.1 przedstawiono wykres przebiegu zmiennych stanu i sterowania dla algorytmu **NDOBRC** przy obecności zakłóceń realizowanych jako seria ręcznych wypchnięć roweru ze stanu równowagi.



Rys. E.1. Wyniki działania regulatora **NDOBRC** przy ręcznym wytrącaniu z punktu równowagi.

Dodatkowo, na rysunku E.2 przedstawiono wykres estymowanych wartości zakłócenia.



Rys. E.2. Estymowane zakłócenia dla testu przy ręcznym wytrącaniu z punktu równowagi.

Bibliografia

- [1] The Murata Boy Website.
- [2] *RT-DAC4/PCI-D Multi I/O Board Users Manual*. Kraków, 2010.
- [3] Traffic safety facts, 2008. Report no. DOT HS-811-159, 2010.
- [4] <https://fmi-standard.org/tools/>, 2019.
- [5] AGUIRRE, L. A., AND LEONARDO LUIZ PORTES, C. L. Structural, Dynamical and Symbolic Observability: From Dynamical Systems to Networks. *PLoS ONE* 13, 10 (Październik 2018).
- [6] AI-BURAIKI, O., AND EI FERIK, S. Adaptive Control of Autonomous Bicycle Kinematics. In *International Conference on Control, Automation and Systems* (Gwangju, Korea Południowa, Październik 2013).
- [7] APHIRATSAKUN, N., AND TECHAKITTIROJ, K. Autonomous AU Bicycle: Self-Balancing and Tracking Control (AUSB). *Proceeding of the IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO) 1* (2013), 480–485.
- [8] ARTSTEIN, Z. Stabilization with Relaxed Control. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 7, 11, 1163–1173.
- [9] ASTRÖM, K., KLEIN, R., AND LENNARTSSON, A. Bicycle Dynamics and Control: Adapted Bicycles for Education and Research. *IEEE Control Systems Magazine* 25 (Sierpień 2005), 26–47.
- [10] BERNARD, P. Survey of Linear Quadratic Robust Control. *Macroeconomic Dynamics* 6, 1 (2002), 19–39.
- [11] BERRY, A., LEMUS, D., BABUSKA, R., AND VALLERY, H. Directional Singularity-Robust Torque Control for Gyroscopic Actuators. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* (Sierpień 2016).

- [12] BEZDOS, A. V., FORMALSKY, A. M., GURFINKEL, E. V., JICHAREV, D. N., LENSKY, A. V., SAVITSKY, K. V., AND TCHESALIN, L. S. Control of Autonomous Motion of Two-Wheel Bicycle with Gyroscopic Stabilisation. In *International Conference on Robotics & Automation* (Maj 1998).
- [13] BUKHAR, H. Z., BHATTI, A. I., AFTAB, M. F., AND SHAFIQ, K. Multi-Objective Controller for Control Moment Gyro (CMG) using LMI. *Proceedings of 6th International Bhurban Conference on Applied Sciences & Technology* (Styczeń 2009).
- [14] CHEN, W. Disturbance Observer Based Control for Nonlinear Systems. *IEEE/ASME Trans. Mechatron* 9, 4 (2004), 706–710.
- [15] CHEN, W., BALLANCE, D., GAWTHROP, P., AND O'REILLY, J. A Nonlinear Disturbance Observer for Robotic Manipulators. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 47, 4 (Sierpień 2000).
- [16] CHEN, W.-H., YANG, J., GUO, L., AND LI, S. Disturbance observer-based control and related methods: An overview. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 2015 (2015).
- [17] CHENG-LONG, G., AND YUAN, J. Disturbance observer based composite nonlinear feedback controller design for robot manipulators. *2018 the International Conference of Intelligent Robotic and Control Engineering*, (Sierpień 2018).
- [18] CHIDZONGA, R. F., AND EITELBERG, E. Controlling Velocity and Steering for Bicycle Stabilization. *International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2009.
- [19] CHU, T.-D., AND CHEN, C.-K. Design and Implementation of Model Predictive Control for a Gyroscopic Inverted Pendulum. *Applied Sciences* 7, 12 (2017).
- [20] CLARK, C., WORRALL, K., AND YAVUZOGLU, E. A Control Moment Gyro for Dynamic Attitude Control of Small Satellites. In *24th Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites*.
- [21] COLVIN, G. Development and Validation of Control Moment Gyroscopic Stabilization, 2014.
- [22] DEL ROSSO, V., ANDREUCCI, A., BORIA, S., CORRADINI, M. L., GIAMB, R., AND RANALLI, A. Modelling and control of a self-balancing electric motorcycle: Preliminary results, Czerwiec 2018.
- [23] DEL ROSSO, V., ANDREUCCI, A., BORIA, S., CORRADINI, M. L., GIAMB, R., AND RANALLI, A. Self-balancing Two-wheel Drive Electric Motorcycle Modelling and Control: Preliminary Results. *Conference: 2018 5th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)* (Kwiecień 2018), 358–363.
- [24] DORIA, ALBERTO, R. S., AND MUÑOZ, L. Stability Analysis of Bicycles by Means of Analytical Models with Increasing Complexity. *Mechanical Sciences* 10 (2019), 229–241.

- [25] EBRAHIM, E. A Self-Contained Introduction to Lie Derivatives, 2010.
- [26] EL-AAL, A., ROUSTOM, M., HEGAZE, M., AND IBRAHIM, M. Modeling and Control of Unstable Mechanical Systems Using Control Moment Gyro (CMG).
- [27] ERTAN, H. B., AND ÇAĞAN, N. Comparison of Outer Rotor Radial Flux and Axial Flux PM Motors for CMG Application. In *International Conference on Electrical Machines (ICEM)* (Berlin, Niemcy, 2014).
- [28] FENG Y., DU R., X. Y. Steering Angle Balance Control Method for Rider-Less Bicycle Based on ADAMS. In *Proceedings of the Second International Conference on Intelligent Transportation* (Sierpień 2016), pp. 15–31.
- [29] FREEMAN, R. A., AND KOKOTOVIC, P. V. Robust Control of Nonlinear Systems, 1996.
- [30] FREEMAN, R. A., AND KOKOTOVIC, P. V. Robust Control of Nonlinear Systems. *Inverse Optimality in Robust Stabilization - SIAM J. Control and Optimization* 34, 4 (1996), 1365–1391.
- [31] FRIEDLAND, B. Treatment of Bias in Recursive Filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control AC-14*, 4 (1969).
- [32] G. CHESI, A. GARULLI, A. T., AND VICINO, A. Homogeneous Lyapunov functions for systems with structured uncertainties. *Automatica (Journal of IFAC)* 39, 6 (2003), 1027–1035.
- [33] GARABEDIAN, B., BENOIT, M., AND KRUT, S. A Futuristic Monorail Tramway Stabilized by an Inertia Wheel. In *2007 IEEE International Conference on Control and Automation*.
- [34] GARCÍA, M., MÁNTARAS, D., ÁLVAREZ, J., AND BLANCO, F. Stabilizing an Urban Semi-Autonomous Bicycle. *IEEE Access* 6 (2018), 5236–5246.
- [35] GARULLI, A., TESI, A., AND VICINO, A. Uncertainty Model for Robustness Analysis, Control Systems. *Robotics and Automation* 9 (2001).
- [36] GARZIAD, MOUAD, S. A. Review on dynamics, control and stability of two wheeled vehicle. *SSRG International Journal of Mechanical Engineering (SSRG-IJME)* 6, 7 (Lipiec 2019).
- [37] GE, S., TANG, G., AND ZHANG, C. Optimal Disturbance Rejection for Discrete-time Nonlinear Systems with Time-delays via High-gain Observer-Based Control. *Chinese Control and Decision Conference* (May 2010).
- [38] GENTA, G. *Kinetic energy storage: Theory and Practice of Advanced Flywheel Systems*. Butterworth-Heinemann (Publishers) Ltd., 1985.
- [39] GETZ, N. H. Control of Balance for a Nonlinear, Nonholonomic, Non-Minimum Phase Model of Bicycle. In *Proceedings of 1994 American Control Conference* (Baltimore, USA, Czerwiec 1994).

- [40] GETZ, N. H., AND MARSDEN, J. E. Control for Autonomous Bicycle. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (Nagoya, Japonia, Maj 1995).
- [41] GRABOWSKI, P. The LQ/KYP Problem for Infinite-Dimensional Systems. *Opuscula Mathematica* 37, 1, 21–64.
- [42] GRABOWSKI, P. *Stabilność Układów Lurie*. AGH Uczelniane Wydawnictwo Naukowo-Dydaktyczne, Kraków, 1999.
- [43] GRAMMATICO, S. Composite Control Lyapunov Functions for Robust Stabilization of Constrained Uncertain Dynamical Systems. Phd thesis, supervisor: Andrea Caiti, University of Piza, 2013.
- [44] GÓRECKI, H., FUKSA, S., KORYTOWSKI, A., AND MITKOWSKI, W. *Sterowanie Optymalne w Systemach Liniowych z Kwadratowym Wskaźnikiem Jakości*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1983.
- [45] GRÖNLUND, A., AND TOLIS, C. Derivation and implementation of a time variant linearized state space model for balancing a bicycle in motion by turning the front wheel, 2018.
- [46] GUO, L., LIAO, Q., WEI, S., AND HUANG, Y. Kind of Bicycle Robot Dynamic Modeling and Nonlinear Control. In *Proceedings of the International Conference on Information and Automation*.
- [47] GUO, L., LIAO, Q., WEI, S., AND HUANG, Y. A Kind of Bicycle Robot Dynamic Modeling and Nonlinear Control. *Proceedings of the International Conference on Information and Automation* (Czerwiec 2010), 1613–1617.
- [48] GUO, L., LIAO, Q., WEI, S., AND HUANG, Y. Kind of Bicycle Robot Dynamic Modeling and Nonlinear Control. In *The 2010 IEEE International Conference on Information and Automation* (Harbin, Chiny, Czerwiec 2010).
- [49] GUO, L., LIAO, Q., WEI, S., AND ZHUANG, Y. Design of Linear Quadratic Optimal Controller for Bicycle Robot. In *IEEE International Conference on Automation and Logistics* (Shenyang, Chiny, Sierpień 2009).
- [50] GUO, Y., AND JONES, R. A Study of Approaches for Model Based Development of an Automotive Driver Information System. In *3rd Annual IEEE Systems Conference* (Marzec 2009).
- [51] GUSTAFSSON, J. *Statistical Sensor Fusion*. Studentlitterature, Lund, Szwecja, 2012.
- [52] HAPPEE, R., SCHWAB, A., DE LANGE, P., AND MOORE, J. Rider Control Identification in Bicycling Using Lateral Force Perturbation Tests. vol. 227, pp. 390–406.
- [53] HE, J., AND ZHAO, M. Control System Design of Self-balanced Bicycles by Control Moment Gyroscope. *Proceedings of the 2015 Chinese Intelligent Automation Conference* (Styczeń 2015).

- [54] HEDRICK, J. K., AND GIRARD, A. Control of Nonlinear Dynamic Systems: Theory and Applications. https://www.researchgate.net/publication/290128700_Control_of_nonlinear_dynamic_systems_theory_and_applications, 2005.
- [55] HENRION, D., ARZELIER, D., PEAUCELLE, D., AND LASSERRE, J. B. On Parameter-Dependent Lyapunov Functions for Robust Stability of Linear Systems. *Applied Mathematics and Computation* 179, 2 (Sierpień 2006), 612–621.
- [56] HERLIHY, D. *Bicycle: The History*.
- [57] JIAJIA TAN, DAN LI, J. Q. Z. B. H., AND LU, Q. Biased Kalman Filter. International Conference on Sensing Technology, 2011.
- [58] KACZOREK, T. *Teoria Sterownia i Systemów*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1993.
- [59] KANJANAWANISHKUL, K. LQR and MPC Controller Design and Comparison for a Stationary Self-Balancing Bicycle Robot with a Reaction Wheel. *Kybernetika* 54, 1 (2015), 173–191.
- [60] KEO, L., AND YAMAKITA, M. Controlling Balancer and Steering for Bicycle Stabilization. 2009 *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*.
- [61] KEO, L., AND YAMAKITA, M. Dynamic Model of a Bicycle with a Balancer and Its Control. *Symposium on the Dynamics and Control of Single Track Vehicles* (Październik 2010).
- [62] KEO, LYCHEK PORNSARAYOUTH, S., YAMAKITA, M., AND ITO, K. Stabilization of an Unmanned Bicycle with Flywheel Balancer. *IFAC Proceedings Volumes* 43, 14 (Wrzesień 2010), 475–480.
- [63] KHALIL, H. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, New Jersey, 2002.
- [64] KÖHLER, J. "Draisine" by Karl Friedrich Freiherr Drais von Sauerbronn (1817), Kwiecień 2006.
- [65] KIM, Y., KIM, H., AND LEE, J. Stable Control of the Bicycle Robot on a Curved Path by Using a Reaction Wheel. *Journal of Mechanical Science and Technology* 29, 5 (Maj 2015), 2219–2226.
- [66] KOGUT, K. Real-Time Control in Automotive Systems. rozprawa doktorska, Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie, 2017.
- [67] KOK, MANON, H., JEROEN D., AND SCHÖN, T. Using Inertial Sensors for Position and Orientation Estimation. *Foundations and Trends in Signal Processing* 11, 1-2 (2017), 1–153.
- [68] KONSTANTINOV, M. M., GU, D. W., AND PETKOV, P. H. *Robust Control Design with MATLAB*. 2005.

- [69] KREMER, G., AND TAUHID, S. Concept Selection Methods - A Literature Review from 1980 to 2008. *International Journal of Design Engineering* 1, 3 (Styczeń 2008), 243–277.
- [70] KUMAR, A., AND STOL, K. A. Simulating MIMO feedback linearization control of wind turbines using FAST. 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit 7 - 10 January 2008, Reno, Nevada, 2008.
- [71] LA SALLE, J., AND LEFSCHETZ, S. *Zarys Teorii Stabilności Lapunowa i Jego Metody Bezpośredniej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1966.
- [72] LAHIRI, A. *Lecture Notes on Differential Geometry for Physicists*, 2011.
- [73] LAM, P. Design and Development of a Self-Balancing Bicycle Using Control Moment Gyro.
- [74] LAM, P. Gyroscopic Stabilization of a Kid-Size Bicycle. *IEEE 5th International Conference on Cybernetics and Intelligent Systems* (Wrzesień 2011), 247–252.
- [75] LAPPAS, V. J., STEYN, W. H., AND UNDERWOOD, C. Attitude Control for Small Satellites Using Control Moment Gyros. *Acta Astronautica* 51, 1-9 (2002), 101–111.
- [76] LAPPAS, V. J., STEYN, W. H., AND UNDERWOOD, C. Design and testing of a control moment gyroscope cluster for small satellites. *Journal of Spacecraft and Rockets* 42, 4 (2005), 729–739.
- [77] LI, S., YANG, J., CHEN, W.-H., AND CHEN, X. *Disturbance observer-based control: methods and applications*. CRC press (2014).
- [78] MA, Z., AND JIAO, S. Research on the Attitude Control of Quad-Rotor UAV Based on Active Disturbance Rejection Control. *2017 IEEE 3rd International Conference on Control Science and Systems Engineering* (Sierpień 2017).
- [79] MITKOWSKI, W. *Równania Macierzowe i Ich Zastosowania*. Wydawnictwo AGH, Kraków, 2012.
- [80] MOHAMMADI, A., MARQUEZ, H. J., AND TAVAKOLI, M. Nonlinear Disturbance Observers: Design and Applications to Euler-Lagrange Systems. *IEEE Control Systems Magazine* 37, 4 (Sierpień 2017).
- [81] OHATA, A., B. K. Improving Model-based Design for Automotive Control Systems Development. In *IFAC Proceedings Volumes* (Seul, Korea, 2008), vol. 41, pp. 1062–1065.
- [82] OKAWA, A., KEO, L., AND YAMAKITA, M. Realization of Acrobatic Turn via Wheelie for a Bicycle with a Balancer.
- [83] OWCZARKOWSKI, A. Application of Selected Control Algorithms for Nonlinear Systems in Unmanned Bicycle Robot Stabilized by an Inertial Drive, April.

- [84] OWCZARKOWSKI, A., KOZIERSKI, P., AND LIS, M. Mathematical Modeling of Bicycle Robot with the Reaction Wheel. *Journal of Automation, Mobile Robotics & Intelligent Systems* 9, 3, 3–8.
- [85] PENG, Q., QIU, L., AND WANG, Y. An Active Disturbance Rejection Controller based on Kalman Observer for PMSM. *Proceedings of the 36th Chinese Control Conference* (Lipiec 2017).
- [86] POP, C. I., AND DULF, E. H. Robust Feedback Linearization Control for Reference Tracking and Disturbance Rejection in Nonlinear Systems. *Recent Advances in Robust Control – Novel Approaches and Design Methods*, 2011.
- [87] QIANG, M. Structural Conditions on Observability of Nonlinear Systems. *I.J. Information Technology and Computer Science* 4 (Sierpień 2011), 16–22.
- [88] QIBING, J., AND BUYI, J. Modified disturbance observer based control for periodic disturbance rejection in time-delay process. *Proceedings of the 36th Chinese Control Conference, July 26-28, 2017, Dalian, China* (Lipiec 2017).
- [89] R. COSTA-CASTELLÓ, N. CARRERO, S. D., AND FOSSA, E. Teaching, Analyzing, Designing and Interactively Simulating Sliding Mode Control. *Digital Object Identifier* (2018).
- [90] REDWOOD, B. Analysis, design, optimisation and testing of a gyroscopically stabilized platform, 2014.
- [91] RESNICK, R., AND HALLIDAY, D. *Fizyka*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Waeszawa, 1998.
- [92] RICHIE, D. J., LAPPAS, V. J., AND PRASSINOS, G. A practical small satellite variable-speed control moment gyroscope for combined energy storage and attitude control. *Acta Astronautica* 65, 11 (Grudzień 2009), 1745–1764.
- [93] ROTEA, M. A., AND KHARGONEKAR, P. P. Stabilization of Uncertain Systems with Norm Bounded Uncertainty - a Control Lyapunov Function Approach. *SIAM J. Control and Optimization* 27, 6 (Listopad 1989), 1462–1476.
- [94] ROTEA, M. A., AND KHARGONEKAR, P. P. Stabilization of uncertain systems with norm bounded uncertainty - a Control Lyapunov Function Approach. *SIAM J. Control and Optimization* 27, 6 (Listopad 1989), 1462–1476.
- [95] RÓŻEWICZ, M., AND PIŁAT, A. Robust control of bicycle model with CMG. *In Proceedings of the 21st International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics*.
- [96] RÓŻEWICZ, M., AND PIŁAT, A. Study on Controller Embedding Stage Using Model-Based-Design for a Bike with CMG. *Proceedings of the 23rd International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics* (Sierpień 2018).

- [97] RÓŻEWICZ, M., AND PIŁAT, A. Nonlinear Robust Disturbance Observer Based Control for Bicycle with CMG Stabilizer. *IFAC-PapersOnLine* 52, 8 (2019).
- [98] SCHWAB, A. L., DE LANGE, P. D. L., HAPPEE, R., AND MOORE, J. K. Rider Control Identification in Bicycling Using Lateral Force Perturbation Tests. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics* 4, 227, 390–406.
- [99] SONTAG, E. A Lyapunov-like Characterization of Asymptotic Controllability. *SIAM Journal on Control and Optimization* 21, 3, 462–471.
- [100] SONTAG, E. A Concept of Local Observability. *Systems & Control Letters* 5 (Październik 1984), 41–47.
- [101] SPURGEON, S. Sliding Mode Control: a Tutorial. In *European Control Conference* (Strasbourg, Francja, Czerwiec 2014).
- [102] SRINIVASAN, K., GANDHI, D., AND VENUGOPAL, M. Spacecraft attitude control using control moment gyro reconfiguration. *Studies in Informatics and Control* 23, 3 (Wrzesień 2014).
- [103] SUNTHARASANTIC, S., AND WONGSAISUWAN, M. Piecewise Affine Model and Control of Bicycle by Gyroscopic Stabilization. *The 8th Electrical Engineering, Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology Association of Thailand - Conference* (2011), 549–552.
- [104] TAN, J., HUANG, Y., SUDA, Y., MIZUNO, A., AND HORIGUCHI, M. Cornering Stability Improvement by Gyro Moment for Narrow Tilting Vehicle. *Journal of Mechanical Science and Technology* 29, 7 (Lipiec 2015), 2705–2711.
- [105] TAN, L., JIN, G., SUN, C., AND XIONG, Z. High-Order Disturbance Observer for Nonlinear Systems Using Sliding-Mode Technology. *2018 Chinese Control And Decision Conference (CCDC)* (Czerwiec 2018).
- [106] TANAKA, Y., AND MURAKAMI, T. Self sustaining bicycle robot with steering controller.
- [107] TAYEBI, J., AND SOLEYMANI, A. A Comparative Study of CMG and FMC Actuators for Nano Satellite Attitude Control System - Pyramidal Configuration. In *7th International Conference on Recent Advances in Space Technologies (RAST)* (Istanbul, Turcja, Czerwiec 2015).
- [108] THANH, B. T., AND PARNICKUN, M. Balancing Control of Bicyrobo by Particle Swarm Optimization-Based Structure-Specified Mixed $\frac{H_2}{H_1}$ Control. *International Journal of Advanced Robotic Systems* 4, 395–402.
- [109] THANH, B. T., AND PARNICKUN, M. Balancing Control of Bicyrobo by Particle Swarm Optimization-Based Structure-Specified Mixed H_2/H_∞ Control. *International Journal of Advanced Robotic Systems* 5, 4 (2008).

- [110] TRINAMIC. *Hardware Manual: PD-1161*, 2016.
- [111] VEPSÄLÄINEN, J., PELTOLA, M., NYGREN, T., MÄLKÖNEN, J., HEIKKILÄ, E., KIVILUOMA, P., KUOSMANEN, P., SOCIE, D., AND TEERIHALME, S. Effects of the Angular Velocity of a Flywheel on the Gyroscopic Stabilization of a Bicycle. In *10th International DAAAM Baltic Conference* (Maj 2015).
- [112] VOTEL, R., AND SINCLAIR, D. Comparison of Control Moment Gyros and Reaction Wheels for Small Earth-Observing Satellites. In *26th Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites* (Sierpień 2012).
- [113] W. ZHANG, H. SU, X. C., AND GUO, H. Control Lyapunov Function Approach to Stabilization of Affine Nonlinear Systems with Bounded Uncertain Parameters. *Circuits Syst Signal Process* 34, 1 (2015), 341–352.
- [114] WALCK, C. J. Stabilization of an Inverted Pendulum Using Control Moment Gyros. Master's thesis, Iowa State University, 2013.
- [115] WHALEN, A. J., BRENNAN, S. N., SAUER, T. D., AND SCHIFF, S. J. Observability and Controllability of Nonlinear Networks: The Role of Symmetry. *Phys. Rev. X* 5 (Jan 2015), 011005.
- [116] WHIPPLE, F. J. W. The Stability of the Motion of a Bicycle. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 30 (1899), 312–348.
- [117] WILLIAM S. AGEE, E. A. Optimal Estimation of Measurement Bias. *National Range Operations Directorate* (1972).
- [118] WROWER.PL. Historia Roweru.
- [119] YANG, J., CHEN, W. H., AND LI, S. Non-linear Disturbance Observer-based Robust Control for Systems with Mismatched Disturbances/Uncertainties. *IET Control Theory and Applications* (2011), 2053–2062.
- [120] YETKIN, H., KALOUCHE, S., VERNIER, M., COLVIN, G., REDMILL, K., AND ÖZGÜNER, . Gyroscopic Stabilization of an Unmanned Bicycle. In *American Control Conference* (Czerwiec 2014), pp. 4549–4554.
- [121] YIME, E., MORENO, H., SALTAREN, R., AND ARACIL, R. Design of a CMG for Underwater Robots. In *OCEANS 2011 IEEE* (Santander, Hiszpania, Czerwiec 2011).
- [122] YIME, E., QUINTERO, J., SALTARÉN, R. J., AND ARACIL, R. A New Approach to Avoid Internal Singularities in CMG with Pyramidal Shape Using Sliding Control. *2009 European Control Conference (ECC)* (2009), 3899–3903.

- [123] YOSHIDA, K., SATO, K., AND YAMANAKA, Y. Simple Degree-of-Freedom Modeling of the Random Fluctuation Arising in Human–Bicycle Balance. *Applied Science* 9, 10 (Maj 2019).
- [124] ZHAN, K., WANG, Y., AND LIU, L. Improved sliding-mode disturbance observer for nonlinear system. *10th International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC)* (July 2018).
- [125] ZHANG, W., LIANG, Y., SU, H. S., CHEN, M. Z. Q., AND HAN, Z. Z. Robust Stabilization of a Class of Nonlinear Systems with Uncertain Parameters Based on CLFs. In *Proceedings of the 30th Chinese Control Conference* (Yantai, Chiny, Lipiec 2011).
- [126] ZHANG, W., SU, H., CA, X., AND GUO, H. Control Lyapunov Function Approach to Stabilization of Affine Nonlinear Systems with Bounded Uncertain Parameters. *Circuits Systems Signal Process* 34, 1 (Styczeń 2014).
- [127] ZHANG, Y., WANG, P., YI, J., SONG, D., AND LIU, T. Stationary Balance Control of a Bikebot.
- [128] ZHANG, Y., AND YI, J. Dynamic Modelling and Balance Control of Human/Bicycle Systems. In *Proceedings of IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics* (Montreal, Kanada, Lipiec 2010), pp. 1385–1390.
- [129] ZIĘTKIEWICZ, J. Linear Quadratic Control with Feedback-Linearized Models. *Studia z Automatyki i Informatyki* 40 (2015), 37–49.

Uprowadzony o odpowiedzialności karnej na podstawie art. 115 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (t.j. Dz.U. z 2006 r. Nr 90, poz. 631 z późn. zm.): „Kto przywłaszcza sobie autorstwo albo wprowadza w błąd co do autorstwa całości lub części cudzego utworu albo artystycznego wykonania, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 3. Tej samej karze podlega, kto rozpowszechnia bez podania nazwiska lub pseudonimu twórcy cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystycznego wykonania albo publicznie zniekształca taki utwór; artystyczne wykonanie, fonogram, wideogram lub nadanie.”, a także uprowadzony o odpowiedzialności dyscyplinarnej na podstawie art. 211 ust. 1 ustawy z dnia 27 lipca 2005 r. Prawo o szkolnictwie wyższym (t.j. Dz. U. z 2012 r. poz. 572, z późn. zm.): „Za naruszenie przepisów obowiązujących w uczelni oraz za czyny uchylające godności studenta student ponosi odpowiedzialność dyscyplinarną przed komisją dyscyplinarną albo przed sądem koleżeńskim samorządu studenckiego, zwanym dalej «sądem koleżeńskim».”, oświadczam, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem(-am) osobiście i samodzielnie i że nie korzystałem(-am) ze źródeł innych niż wymienione w pracy.